CHAPITRE 2
FORMES QUADRATIQUES

1. Définitions et exemples
   $\mathbb{K}\ corps\ \ car(\mathbb{K}) \neq 2\ \ (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C})$

DEFINITION 13 : FORME QUADRATIQUE

Soit b une forme bilinéaire sur E.

L'application $q: \begin{matrix} E \to \mathbb{K} \\ X \longmapsto b(x,x) \end{matrix}$ et appelée forme quadratique associée.

Remarque :

$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)\ \ \forall\, \lambda\ \in\ \mathbb{K}$

$Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel sur K

Remarque :

La forme quadratique q associée à b est nulle ssi b est alternée.

$\begin{matrix} B(E \times E, \mathbb{K}) \to Q(E) \\ b\ \longmapsto q \end{matrix}$ est linéaire.

Son noyau est l'espace des formes bilinéaires alternées.

PROPOSITION 13 :

Toute forme quadratique q sur E est associée à une et une seule forme bilinéaire symétrique. On l'appelle a forme polaire et on la note b_q.

$$B(E \times E, K) = S_2(E) \oplus A_2(E)$$
$$\dim Q(E) = \dim B(E \times E, K) - \dim A_2(E)$$
$$\dim S_2(E) = \dim B(E \times E, K) - \dim A_2(E)$$

d'où dim Q(E)= dim $S_2(E)$

$\begin{matrix} S_2(E) \to Q(E) \\ b \longmapsto q = b(x,x) \end{matrix}$

est un isomorphisme (car inj et de même dimension)

Pour calculer b_q $on\ regarde$ la partie symétrique de b $b_q = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2}$

PROPOSITION 14 : FORME DE POLARISATION

Soit q une forme quadratique de forme polaire b_q. Alors b_q est donnée par $\forall\ x, y\ \in E$.

$(x,y) \to \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$

PREUVE:

- Il faut montrer que$(x,y) \to \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$ est bilinéaire symétrique
- q lui est associée.

Exemples :

1) f,g forme linéaires sur E

   q : $x \longmapsto f(x)g(x)$ est forme quadratique

   $b(x,y) = f(x)g(y)$ est bilinéaire

   $b_q(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} = \frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)}{2}$

2) $q : \begin{matrix} M_n(K) \to K \\ A \longmapsto tr\,(A^2) \end{matrix}$

   $b(A,B) = tr(AB)$ est bilinéaire symétrique

   b est la forme polaire de q

   $\mathrm{q}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}A)$ est quadratique

   $b(A,B) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}B)$

3) $q: \begin{matrix} M_2(K) \to K \\ A \longmapsto \det A \end{matrix}$ forme quadratique

   $f_1 : A \longmapsto a_{1,1}$

   $f_2 : A \longmapsto a_{1,2}$ elles sont linéaires

   $f_3 : A \longmapsto a_{2,1}$

   $f_4 : A \longmapsto a_{2,2}$

   $A \longmapsto f_1(A)f_4(A) - f_2(A)f_3(A)$

   C'est bien une forme quadratique de forme polaire

   $b_q(A,B) = \frac{\det(A+B) - \det A - \det B}{2}$

   $q: \begin{matrix} M_3(K) \to K \\ A \longmapsto \det A \end{matrix}$ n'est pas quadratique

   $q(\lambda A) = \lambda^3 q(A)$

4) $q: \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \longmapsto {x_1}^2 + {x_2}^2 \end{matrix}$ $forme\ quadratique$

   $b\big((x_1,x_2)(y_1,y_2)\big) = x_1y_1 + x_2y_2$

   $b'\big((x_1,x_2)(y_1,y_2)\big) = x_1y_1 + x_1y_2 - \mathrm{x}_2\mathrm{y}_1 + \mathrm{x}_2\mathrm{y}_2$

5) $A \in \mathrm{S_n(K)}$

   $q : X \longmapsto {}^tX\mathrm{AX}$ forme quadratique

   $b(X,Y) = {}^tX\mathrm{AY}$

DEFINITION 14 : ESPACE QUADRATIQUE

On appelle un espace quadratique la donnée d'un espace vectoriel et d'une forme quadratique.

2. Représentation d'une forme quadratique dans une base.

   E $K-e.v.$ dim finie, $car(K) \neq 2$ muni d'une base $B=(e_1,\dots,e_n)$

DEFINITION 14 : REPRESENTATION MATRICIELLE

On appelle matrice associée à q dans B la matrice de sa forme polaire

PROPOSITION 15 :

Soit q forme quadratique représentée par A dans B. Soit B' une autre base et A' la matrice de q dans B' et P la matrice de passage de B à B'.

Alors $q: X \longmapsto {}^tXAX$ et $A' = {}^tPAP$

DEFINITION 15 : REPRESENTATION POLYNOMIALE

$$i=(i_1,\dots,i_n)$$

$$P(X_1,\dots,X_n)=\sum_{\substack{indexé\ par\ i\\ i_1+\dots+i_n=d}} a_i X_1^{\ i_1}\dots X_n^{i_n}$$

homogène de degré d.

ex : $X_1^{\ 2}+2X_1X_2+3X_2^2$

$X_1^5+X_2^4X_1+X_2^5$

$P\ \in K[X_1,\dots,X_n]$

P Homogène de degré 2. $P=\sum_{i=1}^n a_i + x_i^{\ 2} + \sum_{1\le i<j\le,} 2\beta_{i,j}X_iX_j$

On lui associe la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,n}\\ \beta_{1,2} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_{1,n} & \dots & & a_n \end{pmatrix} A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j}$$ matrice sym

$$a_{i,j}\quad \begin{cases} a_i \\ \beta_{i,j}, si\ i\neq j \end{cases}$$

Réciproquement à une matrice symétrique m lui associe un polynôme homogène de degré 2.

Rmq :

$$q\colon \begin{matrix} (x_1,\dots,x_n)\longmapsto P(x_1,\dots,x_n) \\ X\longmapsto {}^tXAX \end{matrix}$$

On dit que P représente la forme quadratique q dans la base.

3. Equivalence de formes quadratiques

DEFINITION 16 : MORPHISME

(E, q) et (F, q') espaces quadratiques :

Un morphisme d'espaces quadratiques :

$$u : E \to F \;\; linéaire$$

Et $\forall\, x \in E \;\, q(x) = q'(u(x))$

- Un morphisme injectif est une isometrie
- Un morphisme bijectif est un isomorphisme

Morphisme : diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "q"'] & & F \arrow[dl, "q'"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Remarque : Les isomorphismes d'espaces quadratiques donnent une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes quadratiques , si (E, q) et (F, q') sont isomorphes alors que q est équivalente à q' et on le note $(q \simeq q')$

$q \simeq q'$ et $q' \simeq q''$

$(E, q) - u \to (F, q')$ $\quad (F, q') - v \to (G, q'')$ on a $(E, q) - u \; o \; v \to (G, q'')$ est un isomorphisme d'espace quadratique

PROPOSITION 16 :

(E, φ) et (F, ψ) espaces quadratiques. b_φ , b_ψ formes polaires associées à $\varphi \; et \; \psi$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\varphi \; \simeq \; \psi$
2) $b_\varphi \simeq b_\psi$

PREUVE:

$(2) \Longrightarrow (1)$ $u\!: E \to F$ linéaire bijection tel que $\forall X, \forall Y \in E$

$b_\varphi(X, Y) = b_\psi(u(X), u(Y))$

donc $\varphi(X) = b_\varphi(X, X) = b_\psi\big(u(X), u(Y)\big) = \psi(u(X)$ donc $\varphi \;\simeq\; \psi$

$(1) \Longrightarrow (2)$ $\; u\!: E \to F \; isomorphisme$ tel que $\forall X, \varphi(X) = \psi(u(X)$

On considère l'application

$$\begin{aligned} E \; \times E &\to K \\ (x, y) &\longmapsto b_\psi\big(u(X), u(Y)\big) \end{aligned}$$

- C'est une forme bilinéaire
- Elle est symétrique
- Sa forme quadratique associée est $X \to b_\psi\big(u(X), u(X)\big) = \psi(u(X) = \; \varphi(X)$
  Donc il s'agit de b_φ (par unicité de sa forme polaire)

CORROLAIRE 17 :

q,q' 2 formes quadratiques sur des espaces de dimensions finies sont équivalentes :

1) $q \simeq q'$
2) Leurs matrices associées sont congruentes
3) Dans les bonnes bases elle ont la même matrice et même polynôme

$$(M = PM'P)$$

4. Domaine, dimension, rang, noyau

E $\mathbb{K} - ev$ dim finie

q forme quadratique, b forme polaire

DEFINITION 17 : DOMAINE

$\lambda \in \mathbb{K}^*$ est représenté par q si $\exists\, x \in E$ tel que $q(x) = \lambda$.

On appelle domaine de q l'ensemble $D(q) = \{q(x), x \in E\}\backslash\{0\}$

On dit que q est universelle si $D(q) = \mathbb{K}^*$

Exemple :

1) $q(x, y) = xy$ est universelle $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, q(1, \lambda) = \lambda$
2) Toute forme quadratique non nulle sur $\mathbb{C}$ est universelle. Soit $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$.
   Soit $q(x) = \alpha \in \mathbb{C}$. Soit $\beta \in \mathbb{C}^*$
   et il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que
   $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma^2$ donc $\beta = \alpha\gamma^2$
   $q(\gamma x) = \gamma^2 q(x) = \gamma^2 \alpha = \beta$
3) q forme quadratique sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas négative ni positive alors elle est universelle

PROPOSITION 18 :

Si $q \simeq q'$ alors $D(q) = D(q')$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "q"'] & & F \arrow[dl, "q'"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Si $\lambda \in D(q), \exists\, x \in E, q(x) = \lambda \;\; q'(u(x)) = \lambda$ donc $\lambda \in D(q')$

Si $\beta \in D(q'),\ \exists\, y \in F, q(y) = \beta \;\; q'(u(y)) = \beta$ donc $\beta \in D(q)$

DEFINITION 18 : DIMENSION

La dimension de q est la dimension de l'espace E.

DEFINITION 19 : DIMENSION

Le noyau de q est l'ensemble.

$Ker\ q = \{x \in E, \forall y \in E, b(x, y) = 0\} = Ker\ b = Ker\ b_d$

PROPOSITION 19 :

Pour tout $A \in S_n(\mathbb{K})$ le noyau de q est le noyau de $q: X \longmapsto {}^tXAX$.

Le rang de q, noté $rg(q)$ est $n - \dim(Ker\ q) = n - \dim Ker\ A = rg(A)$

Exemple :

$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $rg(q) = 2$

$Ker\ (q) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Remarque : Si $q \simeq q'$ alors $rg(q) = rg(q')$

DEFINITION 20 : FORME QUADRATIQUE REGULIERE OU DEGENEREE

On dit que q est régulière (ou non dégénérée)

Si $Ker\ q = \{0\}$. Sinon on dit qu'elle est dégénérée.

Ex : $q: A \to tr(A^2)$ $b: (A, B) \to tr(AB)$

$A \in Ker\ q$ si $\forall\ B\ tr(AB) = 0$

En particulier $E_{i,j}$, $tr(AE_{i,j}) = a_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \dots & \overset{j}{1\dots} & 0 \\ & & \vdots & \\ & & 0 & \end{array} \right) \end{array} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & \dots & \overset{j}{a_{1j}\dots} & 0 \\ & & \vdots & \\ & & a_{nj} & \end{array} \right)$$

$A = 0$ donc q est régulière.

5. Cône isotrope et conique projective

DEFINITION 21 : ISOTROPE

$X \in E$ est isotrope si $q(X) = 0$

S'il existe un vecteur isotrope non nul, on dit que q est isotrope.

Exemple :

$q(x, y) = xy$ les vecteurs isotropes sont les éléments de $(\mathbb{K} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{K})$

Remarque : Si X est isotrope $q(X) = 0$ alors tous les λ_X, $\lambda \in \mathbb{K}$ sont isotropes.

DEFINITION 22 : LE CONE ISOTROPE

Le cône isotrope est l'ensemble $Co(q) = \{X \subset E, q(X) = 0\}$

Remarque : $Ker\ q \subset Co(q)$ $X \in Ker\ q$ alors $\forall y$ $b(x, y) = 0$ donc $b(x, x) = 0$ d'où $q(x) = 0$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $Ker\ q = \{0\}$ par contre $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $est\ dans\ C_O(q)$ $q(x, y) = 2y^2 + 2xy$

Remarque : Co(q) n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E

DEFINITION 23 : LA CONIQUE PROJECTIVE

L'ensemble des droites vectorielles de Co(q) est appelé la conique projective $\subseteq \mathbb{P}(E)$

$\mathbb{P}(E)$:ensemble des droites vectorielles de E ss-e.v. de dim 1

6. Les déterminants

$M = {}^tPM'P \qquad det\ M = (det\ \ P)^2\, det\ M'$

Notation: $(\mathbb{K}^*)^2 = \{\lambda^2, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$

DEFINITION 24 : DETERMINANT D'UNE FORME QUADRATIQUE

$$det\colon \begin{array}{l} \{formes\ quadratiques\} \to \mathbb{K}/(\mathbb{K}^*)^2 \\ \quad q \ \longmapsto \det M_B(q) \ \ mod\ (\mathbb{K}^*)^2 \end{array}$$

Cette application est bien définie

On appelle det(q) l'image de q par cette application c'est le déterminant de q.

Exemple :

$q(x,y) = xy \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det\ q = -\frac{1}{4}\ mod\ (\mathbb{K}^*)^2 = -1 mod\ (\mathbb{K}^*)^2$$

COROLLAIRE 20 :

Si $q \simeq q'$ alors $\det q = det\ \ q'$

DEFINITION 25 : AUTOMORPHISME

Un automorphisme orthogonal de (E,q) est un isomorphisme u de (E,q) dans (E,q)

$$\forall x \in E, q(x) = q(u(x))$$

L'ensemble des automorphismes orthogonaux est noté $O(q)$

PROPOSITION 21 :

L'ensemble O(q) est un sous-groupe de GL(E)

exemple : $a \ \subset E$ non isotrope $(q(a) \neq 0)$

$$S_a\colon \begin{array}{l} E \to E \\ x \ \longmapsto x - \dfrac{2b(a,x)}{q(a)} a \end{array}$$

C'est la réflexion orthogonal de E associée à a. C'est un automorphisme orthogonal de E.

S_A : est la symétrie de E par rapport à $H = Ker\ b(a,-)$ parallèlement à Vect(a)

PROPOSITION 22 :

Soit q non dégénérée, $u \in O(q)$ alors $\det u = \pm 1$

PREUVE:

$$O(q) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} M \in GL_n(K) \text{ tel que} \\ {}^tMAM = A \end{cases}$$
$$u \to M_B(u)$$

où $A = M_B(q)$

$$\det({}^tMAM) = \det A$$
$$(\det M)^2 \det A = \det A$$
$$(\det M)^2 = 1$$
$$\det M = \pm 1$$

DEFINITION 26 : GROUPE SPECIAL ORTHOGONAL

On note $SO(q) = \{u \in O(q), \det u = 1\}$

C'est le groupe special orthogonal

On le note aussi souvent $O^+(q)$.

On note son complémentaire $O(q) \backslash O^+(q) = O^-(q)$.

7. La diagonalisation de formes quadratiques

(E,q) espace quadratique, b forme polaire de q.

Bases orthogonales.

DEFINITION 27 : BASE ORTHOGONALE

Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est orthogonale

Si $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}\ i \neq j$

$b\{e_1, \dots, e_n\} = 0$

i.e. tous les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux.

exemple :

1. $E = K^n$ $\qquad q(X) = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$
   la base canonique est orthogonale

DEFINITION 28 : BASE ORTHONORMEE

Une base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée si elle est orthogonale et $\forall\, i, q(e_i) = 1$

LEMME 23:

Si $(e_1, \dots, e_n)$ famille orthogonale de vecteurs non isotropes.

Alors elle est libre.

PREUVE:

$$o = b\left(\sum_{i=1}^{r} a_i e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i b(e_i, e_j) = a_j q(e_j)$$
$$\Longrightarrow a_j = 0$$

Donc $a_j = 0 \ \forall \ j = 1, \dots, r$ et donc la famille est libre.

Existence de bases orthogonales.

THEOREME 24:

Tout espace quadratique de dimension finie admet une base orthogonale.

CONSEQUENCE :

- Il existe une matrice diagonale qui représente q.
- q représenté par un polynôme $a_1 X_1^2 + \cdots + a_n X_n^2$, $a_i \in \mathbb{K}$.
- $\exists$ base $(f_1, \dots, f_1)$ de E^* et des $a_i \in \mathbb{K}$ tel que $q = a_1 {f_1}^2 + \cdots + a_n {f_n}^2$

PREUVE:

Par récurrence sur $n = \dim E$

Si n=1, il n'y a rien à démontrer

Supposons que c'est vrai $\forall$ $espace\ de \dim k \leq n$

Soit (E, q) de dimension n.

Si $q = 0$ toutes les bases sont orthogonales

Sinon, $\exists\ e_1 \in E$ tq $q(e_1) \neq 0$

Soit $H = \{X \in E, b(\_, e_1) = 0\} = Ker(\_, e_1)$

$b(\_, e_1) : E \to \mathbb{K}$ linéaire.

$\dim Ker\ \ b(\_, e_1) + \dim Im\ \ b(\_, e_1) = n$ et $\dim Im\ \ b(\_, e_1) \leq 1$

Si $n = \dim Ker\ b(\_, e_1)$ $\qquad \Longrightarrow \forall X \in E, b(X, e_1) = 0$

mais $q(e_1) \neq 0$

donc $\dim H = n - 1$

On applique l'hypothèse de récurrence à H.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base orthogonale de H, on a donc $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthogonal de E.

COROLLAIRE 25:

Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale

Réduction de Gauss.

q représentée par $\sum_{k=1}^{n} a_k {x_k}^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j}\, x_i x_j$

but écrire q comme somme de carrés de formes linéaires.

1) Si $\exists\ i$ tel que $a_i \neq 0$ quitte à permuter les variables on suppose $a_1 \neq 0$

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_1 {x_1}^2 + x_1 \underbrace{B(x_2, \dots, x_n)}_{homogène\ de\ \deg 1} + \underbrace{C(x_2, \dots, x_n)}_{homogène\ de\ \deg 2}$$

$$q(x_1,\dots,x_n) = a_1 \underbrace{\left(x_1 + \frac{B}{2a_1}\right)^2}_{f\ linéaire\ en\ x_1,\dots,x_n} + \underbrace{C - \frac{B^2}{4a_1}}_{f\ q\ en\ x_2,\dots,x_n}$$

Si tous les $a_i = 0$, on peut supposer $b_{12} \neq 0$

$$q = b_{12}x_1x_2 + x_1 \underbrace{B(x_3,\dots,x_n)}_{f\ linéaire} + x_2 \underbrace{C(x_3,\dots,x_n)}_{f\ linéaire} + \underbrace{D(x_3,\dots,x_n)}_{f\ quadratique}$$

$$q = b_{12}\left(x_1 + \frac{C}{b_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{B}{b_{12}}\right) + D - \frac{CB}{b_{12}}$$

$$q = \frac{b_{12}}{4}(x_1 + x_2 + C + B)^2 - \frac{b_{12}}{4}(x_1 + C - x_2 - B)^2 + D - \frac{CB}{b_{12}}$$

exemple : $q(x,y,z,t) = xy - 2xz - 4yz + 2xt + zt$

$q = xy + x(-2y + 2t) + y(-4z) + zt$

$q = (x - 4z)(y - 2z + 2t) + zt - 8z^2 + 8zt$

$q = \left(\frac{x-4z+y-2z+2t}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-4z-y+2z-2t}{2}\right)^2 + 9zt - 8z^2$

$q = \left(\frac{x+y-6z+2t}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y-2z-2t}{2}\right)^2 + 9zt - 8z^2$

$q = \left(\frac{x+y-6z+2t}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y-2z-2t}{2}\right)^2 - 8\left(z - \frac{9}{16}t\right)^2 + \frac{81t^2}{32}$

$q \simeq x_1^2 - x_2^2 - 8x_3^2 + \frac{81}{32}x_4^2$

remarque : Si Q polynôme représente q dans la base B cette méthode donne une base de E^* $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ telle que la base anteduale de $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est orthogonale pour q.

Réduction de Gauss matricielle.

méthode qui assure que toute matrice symétrique congruente à une matrice diagonale.

FAIT 26:
toute matrice est congruente à une matrice triangulaire par blocs.

$\begin{pmatrix} A_1 & * & * \\ & A_2 & * \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$ où $A_i \in \mathbb{K}$ $A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Formes quadratiques réelles et complexes

1. Classification sur $\mathbb{C}$

THEOREME 27: Toute forme quadratique complexe de dimension n et rang r est représentée par la matrice. $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $i.e.$ q représentée par $x_1^2 + x_r^2$.

PROPOSITION 28 : 2 Formes quadratiques de même dimension & même rang sont équivalentes

PREUVE:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} a_i = (S_i)^2 \ \ \forall i$$

$$a_1x_1^2 + \dots + a_rx_r^2 = (S_1x_1)^2 + \dots + (S_rx_r)^2 = \gamma_1^2 + \dots + \gamma_r^2 \qquad \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Classification sur $\mathbb{R}$

THEOREME 29: Soit q une forme quadratique de rang t. Elle est représentée par la matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & -I_s & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$. On verra que le couple (r, s) ne dépend que de q.

PREUVE:

Soit q forme quadratique sur $\mathbb{R}$.

q représentée pour $\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_r & & & & & & \\ & & & b_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & b_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$a_i = (\delta_i)^2$

$b_i = -(\gamma_i)^2$

on peut supposer $\begin{matrix} a_1, \dots, a_r > 0 \\ b_1, \dots, b_s < 0 \end{matrix}$

q est représentée par $\begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & -I_s & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

9. Formes quadratiques positives et négatives.

DEFINITION 29 : FORME POSITIVE ET NEGATIVE

- q est positive si $\forall\, x \in E$, $q(x) \geq 0$ on le note $q \geq 0$
- q est négative si $\forall\, x \in E$, $q(x) \leq 0$ on le note $q \leq 0$
- q est définie positive si $q > 0$ négative si $q < 0$

THEOREME 30: Soit q une forme quadratique réelle positive de rang r alors q est représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

- q peut donc s'écrire de la forme $q = {f_1}^2 + \cdots + {f_r}^2$ où tous les f_i sont des formes linéaires indépendantes.

Exemple :

- Sur $\mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto {x_1}^2 + \ \dots + {x_n}^2$ est définie positive.
- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A \longmapsto tr({}^tAA)$ est définie positive.
- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A \longmapsto tr({}^tAA)$ n'est ni positive ni négative.

DEFINITION 30 : MATRICE SYMETRIQUE

Une matrice symétrique $A \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp.négative, déf pos, déf néga) si la fq associée est positive (resp.négative, déf pos, déf néga)

Notation :
$S_n^+(\mathbb{R})$ mat de $S_n(\mathbb{R})$ positive.
$S_n^{++}(\mathbb{R})$ mat de $S_n(\mathbb{R})$ def positive.
$S_n^-(\mathbb{R})$ mat de $S_n(\mathbb{R})$négative.
$S_n^{--}(\mathbb{R})$ mat de $S_n(\mathbb{R})$ def négative.

DEFINITION 31 : SIGNATURE D'UNE FORME REELLE

(E, q) espace quadratique réel dim finie.
$i_+(q) = \max\{\dim F,$ F ss-ev de E tel que $q|_F > 0\}$
$i_-(q) = \max\{\dim G,$ G ss-ev de E tel que $q|_G < 0\}$
La signature de q est le couple $(i_+(q), i_-(q))$

THEOREME 31 : THEOREME D'INERTIE DE SYLVESTER

Soit q une fq réelle de dimension n. on suppose que q est représenté par une matrice.
$\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in S_r^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_s^-(\mathbb{R})$
Alors la signature de q est (r, s) et $rg(q) = r + s$

PREUVE:

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base dans laquelle q est représentée par $\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

F=$Vect(e_1, \dots, e_r)$ $\quad q|_F > 0$ car représentée par la matrice A.

G=$Vect(e_{r+1}, \dots, e_n)$ $\quad q|_G \le 0$ car représentée par la matrice$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $i_+(q) \geq \dim F$

Soit F_1 ss-ev de E tq $q|_{F_1} > 0$ et $\dim F_1 = i_+(q)$

Regardons $F_1 \cap G = \{0\}$ alors $\dim(F_1 + G) = \dim F_1 + \dim G - \underbrace{\dim(F_1 \cap G)}_{0}$

$i_+(q) = \dim F_1 = \dim(F_1 + G) - \dim G \leq \dim E - \dim G = \dim F$
$i_+(q) \leq \dim F$

Donc $i + (q) = \dim F = r$
On a de même $i_-(q) = \dim G = s$.

Rmq :
2 formes quadratiques réelles de même dimension ayant la même signature sont équivalentes.
équivalentes⇔ même signature.

Rmq :
2 formes quadratiques dans $\mathbb{C}$ ayant le même rang sont équivalentes.
Alors que dans $\mathbb{R}$ ce n'est pas suffisant il faut aussi qu'elles aient la même signature.