2. FORMES QUADRATIQUES.

Soit E un espace vectoriel sur K (de caractéristique $\neq 2$). On dit que $q : E \to K$ est une forme quadratique (fq) s'il existe une forme bilinéaire symétrique (fbs)

$$b : E \times E \to K$$

telle que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = b(x, x).$$

L'égalité de polarisation

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

montre que b est déterminée par q. b est appelée la fbs associée à q ou encore la forme polaire (fp) de q.

Exercice 1

(i) Soient $\frac{n(n+1)}{2}$ nombres réels b_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$. Montrer que l'application

$$q : R^n \to R : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i \leq j} b_{ij}\, x_i x_j$$

est une forme quadratique sur R^n.

(ii) Soit a un nombre réel et $q : R^4 \to R : (x, y, z, t) \mapsto ax^2 + 2axy + y^2 + 4zt - at^2$.

Pour quelles valeurs de a, q est-elle dégénérée?

On suppose q dégénérée. Donner une base du noyau de q.

Exercice 2

Soit $b : E \times E \to K$ une fbs non nulle de fq q.

i) Montrer qu'il existe $x \in E$ non isotrope i.e. tel que $q(x) \neq 0$.

ii) Montrer que $E = Kx \oplus (Kx)^{\perp_b}$.

iii) Quel théorème important de cours peut-on démontrer à l'aide des questions i) et ii)?

Exercice 3

Montrer que toute forme quadratique $q : E \to K$ de rang 1 est de la forme $q(x) = \lambda(f(x))^2$ où $\lambda \in K^\star$ et $f \in E^\star$ est une forme linéaire non nulle.

Exercice 4

Faire une figure du cône isotrope des formes quadratiques $q_1 : R^2 \to R : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ et $q_2 : R^3 \to R : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$.

Exercice 5

1. Ecrire les fq sur R^3 suivantes sous forme réduite

i) $q_1(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

ii) $q_2(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$

iii) $q_3(x, y, z) = xy + xz$.

Pour chacune d'elles, donner le rang, la signature, le noyau et une base de R^3 orthogonale pour la fp b_i de q_i.

2. Mêmes questions pour la fq de l'exercice 1 (ii).

Exercice 6

Soit la forme quadratique
$$q : M_2(R) \to R : A \mapsto det(A).$$

Donner q sous forme réduite. En déduire le rang, la signature et une base de $M_2(R)$ orthogonale pour la fp b de q.

Exercice 7

Soit $q : R^n \to R$ la fq $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$.
Expliciter la fp b de q. Déterminer le cône isotrope de q. q est-elle sous forme réduite de Gauss?

Exercice 8 (Identité du parallélogramme)

Soit $q : E \to R$ une application continue vérifiant
$$\forall (x, y) \in E^2,\ q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y) \qquad (\star)$$

Pour $(x, y) \in E^2$ on pose
$$b(x, y) := \frac{q(x + y) - q(x) - q(y)}{2}.$$

i) Montrer que b est symétrique.

ii) Montrer que b est additive à droite i.e.
$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ b(x, y + z) = b(x, y) + b(x, z).$$

[Indic: appliquer $(\star)$ aux couples $(x, y + z), (x + y, z), (x + z, y), (y, z)$.]

iii) Montrer que $\forall x \in E$, $q(x) = b(x, x)$.

iv) Montrer que b est bilinéaire et q quadratique.

[Indic: commencer par des scalaires rationnels et utiliser un argument de continuité.]

Exercice 9 (Coefficient quadratique du polynôme caractéristique)

Pour $A \in M_n(K)$ posons
$$det(XI_n - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(A) X^{n-k}.$$

On rappelle que $c_0(A) = 1$, $c_1(A) = trA$.

i) Vérifier que $A \mapsto c_k(A)$ est une application polynomiale homogène de degré k.

b) Montrer que $c_2(A) = \frac{(trA)^2 - tr(A^2)}{2}$.

c) En déduire la forme polaire de c_2.

Exercice 10

Soit la fq
$$q : R^3 \to R : (x, y, z) \mapsto x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz$$

i) Déterminer la signature de q.

ii) Soit $P \subset R^3$ un plan vectoriel. Montrer que la restriction de q à P est définie positive si et seulement si $P = u^{\perp_b}$ avec $q(u) = -1$.

Exercice 11

Soit q une fq de signature (p,q) sur l'espace vectoriel réel E et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que

i) si la restriction $q_{|_F}$ est définie positive alors $dimF \leq p$.

ii) si la restriction $q_{|_F}$ est définie négative alors $dimF \leq q$.

iii) si $dimF > \max\,(p,q)$ alors F contient au moins un vecteur isotrope non nul.

Exercice 12

Soit $S = (b_{ij})$ la matrice d'une fbs b dans une base de R^n.

On rappelle que toute matrice symétrique réelle $A \in S_n(R)$ est à spectre réel et $(O_n(R)-)$ diagonalisable.

a) On suppose que la forme quadratique q associé à b est définie positive.

- Montrer que Spec$(S) \subset R_{>0}$.

- Soit $S_p = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(R)$. Montrer que pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}, det\, S_p > 0$.

b) On suppose

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in R$$

i) Montrer que si q est définie positive alors

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \qquad (\star)$$

ii) On suppose $(\star)$. Montrer qu' il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in M_n(R)$ telle que ${}^tTT = S$.

iii) Conclure.

Exercice 13 (Exemples élémentaires de congruences matricielles.)

i) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congruentes dans $M_2(C)$ mais pas dans $M_2(R)$.

ii) Montrer que pour $\alpha \in K^\star$, les matrices$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont congruentes dans $M_2(K)$.

Exercice 14

Soit $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(K)$. Montrer que la relation de congruence

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in Gl_n(K), A =^t PBP$$

est une relation d'équivalence sur $S_n(K)$. Combien y-a-t-il de classes de congruence sur $S_n(C)$? Sur $S_n(R)$? Deux matrices symétriques semblables sont-elles congruentes?

Exercice 15 (Caractérisation des réflexions)
Soit q une fq sur E de fp b et $a \in E$ non isotrope (i.e. $q(a) \neq 0$) . On appelle réflexion orthogonale associée à a l'endomorphisme

$$s_a : E \to E : x \mapsto x - 2\frac{b(a,x)}{q(a)}a.$$

Montrer que les réflexions de E sont les endomorphismes u de E vérifiant
i) $u \in O(q)$
ii) rang $(u - id_E) = 1$
iii) $Im(u - id_E) \not\subset Ker\, q$.

Exercice 16
Soit q une fq sur E, $x, y \in E$ non isotropes distincts tels que $q(x) = q(y)$.
i) Montrer qu'il existe au plus une réflexion s telle que $s(x) = y$.
ii) Montrer qu'il existe une réflexion ou une composée de deux réflexions qui envoie x sur y.
[Indic: montrer que $x + y$ ou $x - y$ est non isotrope.]
iii) En déduire les orbites de $E \setminus C(q)$ sous l'action de $O(q)$. Ici $C(q)$ désigne le cône isotrope de q.

Exercice 17
Soit $S = (b_{ij}) \in S_n(R)$ la matrice d'une forme bilinéaire symétrique b dans une base de R^n
a) Utiliser le fait qu' il existe $O \in O_n(R)$ et une matrice diagonale réelle $D \in M_n(R)$ telle que $S = O^{-1}DO$ pour obtenir une forme réduite de Gauss de la forme quadratique q associée à b. En déduire que pour la signature p (resp. q) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de S.
b) On suppose $b_{ii} = a$, $1 \leq i \leq n$ et $b_{ij} = b$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Discuter, à l'aide du spectre de S la signature de q en fonction des réels a, b.
c) On revient au cas général. On suppose que q$(x) = \sum_i d_i(L_i(x))^2$ est une forme réduite de Gauss de q. Donner une CNS pour que les coefficients d_i soient les valeurs propres de S.

Exercice 18 (Similitudes.)
On dit que les fq q et q' sont semblables s'il existe $\alpha \in K^\star$ tel que $q' \sim \alpha q$.
a) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
b) Trouver un isomorphisme d'espace quadratique entre (E, q) et $(E, \lambda^2 q)$ pour $\lambda \in K^\star$.
c) On note $\mathcal{G}(q) = \{\lambda \in K^\star, q \sim \lambda q\}$. Montrer que $(K^\star)^2$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}(q)$.
d) Montrer que si $n = dim\, E$ est impair et q est non dégénérée, alors

$$\mathcal{G}(q) = (K^\star)^2.$$

[Indic: utiliser le déterminant.]
e) On appelle similitude de l'espace quadratique (E, q) tout isomorphisme $u \in Gl(E)$ pour lequel il existe $\lambda \in K^\star$ vérifiant

$$\forall x \in E,\ q(u(x)) = \lambda q(x).$$

L'ensemble des similitudes est noté $GO(q)$. On dit que λ est le rapport de la similitude u. Montrer qu'on a une suite exacte

$$\{I\} \to O(q) \to GO(q) \to \mathcal{G}(q) \to \{1\}.$$