1. Formes bilinéaires

Exercice 1 Soit b la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le noyau et le rang de b.
2. Trouver une base de l'orthogonal pour b de $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et de $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Calculer la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ de la forme bilinéaire symétrique

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Cette forme est-elle dégénérée ? Quel est son noyau ?

Mêmes questions pour la forme bilinéaire

$$(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Exercice 3 Soit φ l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{tr}(AB). \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.
2. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques. Montrer que la restriction de φ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive.
3. Quel est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour φ ?
4. Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$ pour une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels sur K de dimension finie. On définit :

$${}^t u : \begin{cases} F^* \to E^* \\ f \mapsto f \circ u. \end{cases}$$

1. Vérifier que ${}^t u$ est une application linéaire.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} {}^t u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
3. Étant donné deux applications linéaires $u : E \to F$ et $v : F \to G$, montrer que ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.
4. On suppose E et F munis des bases respectives $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$.
   Montrer que $M_{\mathbf{B}_2^*, \mathbf{B}_1^*}({}^t u) = {}^t M_{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2}(u)$.
5. Soit b une forme bilinéaire sur E.
   Montrer que la composée ${}^t(b_d) \circ i_E : E \to E^*$ est égal à b_g (on a noté i_E l'isomorphisme canonique $E \to E^{**}$).
6. Supposons de plus b symétrique. On note $b' : (x, y) \mapsto b(u(x), u(y))$. Montrer que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b'_g"'] & F \arrow[d, "b_g"] \\ E^* \arrow[r, "{}^t u"'] & F^* \end{tikzcd}$$