Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Algèbre IV Printemps 2012

Groupe A
Enseignant : Marianne Moulin
e-mail : marianne.moulin@univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 13H45-16H45
Salle : Salle 114 (1er étage) Quai 43.

TD 4

- Feuille d'exercice II.

- FORMES QUADRATIQUES –

Exercice 5. Ecrire les fq sur $\mathbb{R}^3$ suivantes sous forme réduite, donner le rang, la signature, le noyau et une base de $\mathbb{R}^3$ Orthogonale pour la fq b_i de q_i.

iii) $q_3(x,y,z) = xy + xz$

2. Faire de même pour la fq suivante $q(x,y,z,t) = ax^2 + 2axy + y^2 + 4zt - at^2$ (fq de l'exercice 1, (ii))

q est dégénérée pour $a = 0$ et $a = 1$.

$\underline{a = 0}$ $\quad q(x,y,z,t) = y^2 + 4zt = y^2 + (z+t)^2 - (z-t)^2$

$E = \mathbb{R}^4$ $rang = 3$, signature=(2,1) forme dégénérée.

$l_1(x,y,z,t) = y$
$l_2(x,y,z,t) = z + t$
$l_3(x,y,z,t) = z - t$

$$v \in Ker\,(q) \implies \begin{cases} l_1(v) = 0 \\ l_2(v) = 0 \\ l_3(v) = 0 \end{cases}$$

$Ker(q) = Vect(1{,}0{,}0{,}0)$

(u_1, u_2, u_3) tq $l_i(u_j) = \delta_{i,j}$

$$\begin{cases} l_1(x,y,z,t) = A \\ l_2(x,y,z,t) = B \\ l_3(x,y,z,t) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = A \\ z + t = B \\ z - t = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = A \\ z = \frac{C-B}{2} \\ t = \frac{B+C}{2} \end{cases}$$

Alors :

$(A,B,C) = (1{,}0{,}0) \Longrightarrow u_1 = (0{,}1{,}0{,}0)$

$(A,B,C) = (0{,}1{,}0) \Longrightarrow u_2 = (0{,}0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$(A,B,C) = (0{,}0{,}1) \Longrightarrow u_3 = (0{,}0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Sinon

$$q(x,y,z,t) = a(x+y)^2 + (1-a)y^2 - a\left(t - \frac{2}{a}z\right)^2 + \frac{4}{a}z^2$$

Cas	a=1	a<0	0<a<1	a>1
Signature	(2,1)	(3,1)	(3,1)	(2,2)
Rang	3	4	4	4

$$\begin{cases} l_1 = x+y & u_1 = (1,0,0,0) \\ l_2 = y & u_2 = (-1,1,0,0) \\ l_3 = t - \frac{2}{a}z & u_3 = (0,0,0,1) \\ l_4 = z & u_4 = (0,0,1,\frac{2}{a}) \end{cases} \quad M_q = \begin{pmatrix} a & & & \\ & (1-a) & & \\ & & -a & \\ & & & \frac{4}{a} \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : (Identité du parallélogramme)

Soit $q: E \to \mathbb{R}$ une application continue verifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$$

Pour$(x,y) \in E^2$

$$b(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$$

1. Montrer que b est symétrique.

$$b(y,x) = \frac{q(y+x) - q(y) - q(x)}{2} = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = b(x,y)$$

2. Montrer que b est additive à droite i.e.

$\forall (x,y,z) \in E^3, b(x,y+z) = b(x,y) + b(x,z)$

$$b(x,y) + b(x,z) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y) + q(x+z) - q(x) - q(z)\big)$$

$$b(x,y) + b(x,z) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) + q(x+z) - 2q(x) - q(y) - q(z)\big)$$

$$b(x,y) + b(x,z)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(q(x+y+z) + q(x+y-z)\big) - q(z)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\big(q(x+y+z) + q(x-y+z)\big) - q(y) - 2q(x) - q(y) - q(z)\right)$$

$$b(x,y) + b(x,z)$$
$$= \frac{1}{2}(q(x+y+z) + \frac{1}{2}q(x+y-z) + \frac{1}{2}q(x-y+z) - 2q(x) - 2q(y)$$
$$- 2q(z)$$

$$b(x,y) + b(x,z) = \frac{1}{2}(q(x+y+z) + q(x) + \boxed{q(y-z)} - \cancel{2}q(x) - 2q(y) - 2q(z))$$

$$b(x,y) + b(x,z) = \frac{1}{2}(q(x+y+z) - q(y+z) + \cancel{2q(y)} + \cancel{2q(z)} - q(x) - \cancel{2q(y)} - \cancel{2q(z)})$$

$$b(x,y) + b(x,z) = \frac{1}{2}\big(q(x+y+z) - q(y+z) - q(x)\big) = b(x,y+z)$$

3. Montrer que b est q(x)=b(x,x)

$$b(x,x) = \frac{q(x,x) - q(x) - q(x)}{2} = \frac{4q(x) - 2q(x)}{2} = q(x)$$

$(*)\ q(x+x)+\underbrace{q(x-x)}_{q(0)=0}=4q(x)$

4. Montrer que b est bilinéaire et q quadratique

$b(\lambda x,y)=\lambda b(x,y) \qquad \lambda \in \mathbb{Q} \to \lambda = \frac{p\in\mathbb{Z}}{r\in\mathbb{Z}^*}$

$\lambda \in \mathbb{Q}$: $b(\lambda x,y)=b\left(\frac{p}{r}x,y\right)=pb\left(\frac{x}{r},y\right)(*)$

or $rb\left(\frac{1}{r}x,y\right)=b(x,y)\Longrightarrow b\left(\frac{1}{r}x,y\right)=\frac{1}{r}\ b(x,y)$

donc $(*)=\frac{p}{r}b(x,y)$

$\lambda \in \mathbb{R}$: par continuité $b(\lambda x,y)=\lambda b(x,y)$

$$\left.\begin{array}{r} b\ bilinéaire \\ b\ symétrie \\ b(x,x)=q(x)\end{array}\right\} q\ quadratique$$

Exercice 7 : Soit q: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fq $q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2$

x_i-x_j indépendant de x_i-x_k

Expliciter la fp b de q. Déterminer le cône isotrope de q. q est-elle sous forme réduite de Gauss ?

fp : $\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)$

sinon $b(u,v)=\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))$

$b(u,v)=\frac{1}{4}(q(u+v)-q(u-v))=\frac{1}{4}\left(\sum(u_i+v_i-u_j-v_j)^2-\sum(u_i-v_i-u_j+v_j)^2\right)$

$b(u,v)=\frac{1}{4}\sum((u_i+v_i-u_j-v_j)^2-(u_i-v_i-u_j+v_j)^2)$

$b(u,v)=\frac{1}{4}\sum(\underbrace{(u_i+v_i-u_j-v_j)}_{A}{}^2-\underbrace{(u_i-v_i-u_j+v_j)}_{B}{}^2)=\frac{1}{4}\sum[A+B][A-B]$

$b(u,v)=\frac{1}{4}\sum(2u_i-2u_j)(2v_i-2v_j)$

$b(u,v)=\sum(u_i-u_j)(v_i-v_j)$

2/ $q(x)=0 \ \longrightarrow \sum_{1\le i<j\le n}\underbrace{(x_i-x_j)^2}_{\ge 0} \to (x_i-x_j)=0\ \forall i,j \to x_i=x_j \forall i,j \quad Co(q)=Vect(1,\dots,1)$

3/ Oui car les (x_i-x_j) sont indépendant les uns des autres.

Exercice 6 : Soit q la fq.

$$q\colon \begin{array}{l} M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \ \longmapsto \det(A)\end{array}$$

Donner q sous forme réduite. E, déduire le rang, la signature, une base orthogonale pour la fp b de q.

Soit $A=\begin{pmatrix} x & z \\ t & y\end{pmatrix}$

$$q(A)=xy-zt$$

$q(A)=xy-zt=\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{(x-y)^2}{4}-\frac{(z+t)^2}{4}+\frac{(z-t)^2}{4}$

$Rg(q) = 4 \qquad sg(q) = (2,2)$

$$\begin{cases} l_1 = x + y = A \\ l_2 = x - y = B \\ l_3 = t + z = C \\ l_4 = t - z = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{A+B}{2} \\ y = \frac{A-B}{2} \\ z = \frac{C+D}{2} \\ t = \frac{C+D}{2} \end{cases}$$

$$A = 1, B = C = D = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} u_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0,0) & u_3 = (0,0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ u_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0,0) & u_4 = (0,0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{matrix}$$