3. Calcul matriciel

Exercice 3.1 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Quels sont les produits possibles de deux de ces trois matrices ? Calculer ces produits.

Exercice 3.2 Soit S et T deux matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer S^2, T^2, ST, TS, STS, TST.

Exercice 3.3 Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ satisfaisant $AB = BA$ (pour un entier $p \geq 1$).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.
2. Exprimer B en fonction de A et de la matrice unité I_3. En déduire les puissances B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.5

1. Soient $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$. Vérifier que $a = bq + r$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

2. L'algorithme d'Euclide appliqué aux nombres 237 et 53 donnent

$$\begin{aligned} 237 &= 53 \times 4 + 25 \\ 53 &= 25 \times 2 + 3 \\ 25 &= 3 \times 8 + 1. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 25 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 53 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 53 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 237 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer A et en utilisant le calcul matriciel, déterminer des entiers u et v tel que $1 = 237u + 53v$.

3. Calculer le PGCD de 738 et 395 à l'aide de l'algorithme d'Euclide. En utilisant le calcul matriciel, en déduire une identité de Bézout.

Exercice 3.6 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (pour un entier $n \geq 1$ fixé).

1. Supposons que A et B sont triangulaires supérieures (c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq j < i \leq n$.) Montrer que AB est triangulaire supérieure.
2. Supposons que la somme de chaque ligne de A et la somme de chaque ligne de B valent 1. Montrer qu'il en est de même pour le produit AB.

Exercice 3.7 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3.8 A tout nombre réel t on associe la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

– Calculer $M(0)$.
– Soit s et t deux réels. Calculer le produit $M(s)M(t)$.
– En déduire que pour tout réel t, la matrice $M(t)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 3.9 En utilisant des opérations élémentaires, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer le cas échéant leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & i-4 & 3-i \\ -i & 3-i & i-2 \\ 1-i & 4 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.10 On se propose de déterminer trois suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée des permiers termes a_0, b_0, c_0 et des relations de récurrences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ c_{n+1} = -a_n - 2b_n + 4c_n \end{cases}$$

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant des opérations élémentaires, vérifier que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire les expressions recpectives des termes a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n, pour tout entier naturel n.

Exercice 3.11 Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & -4 \\ 2x & + & 5y & - & 9z & = & -10 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 11 \end{array} \right.$$

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 8 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & 5y & - & 8z & + & 6t & = & 5 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & + & 2t & = & 4 \end{array} \right.$$

Exercice 3.12 Soit m un nombre réel. En discutant suivant les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant :

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} mx & + & my & - & z & = & 0 \\ mx & + & y & - & mz & = & 0 \\ x & + & my & - & mz & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 3.13 Suivant la valeur des nombres réels a, b, c et d, résoudre le système suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & a \\ 2x & + & y & - & z & = & b \\ x & + & y & - & 3z & = & c \\ 2x & - & y & - & z & = & d \end{array} \right.$$

Exercice 3.14 Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

1. Soit $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
   - $|x_i| \leq |x_p|$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et
   - $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

   Montrer que $|a_p||x_p| \leq s|x_p|$, où s est la somme des nombres $|a_i|$ pour $i \neq p$.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel sur chaque ligne de A, la valeur absolue du terme diagonal est strictement supérieur à la somme des valeurs absolues des autres termes. Montrer que A est inversible. (Indication : raisonner par l'absurde en faisant l'hypothèse que le système d'équations $AX = 0$ à une solution X non nulle.)