Contrôle continu - Lundi 30 avril 2012

Sujet A

durée : 45mn

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.

Question de cours (5 points)**.**
Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel.

Exercice (16 points)**.**

1. (2 points) Soient $u = (1, -1, 0, 0)$, $v = (0, -1, 1, 0)$, $w = (0, 0, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
2. (2 points) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (u, v, w) (c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$). Quelle est la dimension de F ?
3. (4 points) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 3z - 5t = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de G.
4. (4 points) Vérifier que $(0, 2, -1, -1) \in G$ mais que $(0, 2, -1, -1) \notin F$.
5. (2 points) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
6. (2 points) Calculer la dimension de $F \cap G$.

Contrôle continu - Lundi 30 avril 2012

Sujet B

durée : 45mn

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.

Question de cours (5 points)**.**
Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel.

Exercice (16 points)**.**

1. (2 points) Soient $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (0, 0, -1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
2. (2 points) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (u, v, w) (c'est-à-dire $F = \text{Vect}(u, v, w)$). Quelle est la dimension de F ?
3. (4 points) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y + z - t = 0 \text{ et } x - y + 5z - 3t = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de G.
4. (4 points) Vérifier que $(0, 1, 2, 3) \in G$ mais que $(0, 1, 2, 3) \notin F$.
5. (2 points) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
6. (2 points) Calculer la dimension de $F \cap G$.