ISFA Optimisation Cours de Francis Clarke
Partiel premier décembre 2016

Éléments de réponses

1. Les points critiques sont : $(0,0)$ (max local) , $(2,0)$ (min local), $(1,1)$ (selle), $(1,-1)$ (selle). (Question de TD)

(b) direction du vecteur $-(12,12)$, ou $(-1,-1)$, ou $(-1,-1)/\sqrt{2}$

(c) Méthode déductive :

(i) Existence : coercivité ou théorème hybride.

(ii) Candidats dans l'intérieur : le point critique $(2,0)$ donne $f=0$; on peut exclure les points critiques $(1,\pm 1)$, qui ne sont même pas des min locaux.

(iii) Frontière (1) : $x=0, f(0,y)=-3y^2+4, \text{min sur } [-2,2]=-8$ pour $y=\pm 2$.

Frontière (2) : $y=\pm 2$: $f=x^3-3x^2+12x-8$, min sur $\mathbb{R}_+$ en $x=0$ (car $f'>0$), min $=-8$.

D'où la réponse : le min vaut -8, atteint en $(0,\pm 2)$.

(d)

$$\nabla g=\begin{bmatrix}\dfrac{-100}{(x+1)^2(4+y)}+5\\ \dfrac{-100}{(x+1)(4+y)^2}+2\end{bmatrix},\ \nabla^2 g=\begin{bmatrix}\dfrac{200}{(x+1)^3(4+y)} & \dfrac{100}{(x+1)^2(4+y)^2}\\ \dfrac{100}{(x+1)^2(4+y)^2} & \dfrac{200}{(x+1)(4+y)^3}\end{bmatrix}$$

On voit que g est strictement convexe sur A (car la hessienne est dp), et admet un point critique en $(1,1)$. D'où la conclusion.

2. (a) Quand $h=0$ on a forcément $y^2+y-1\leqslant 0$, d'où $|y|\leqslant(1+\sqrt{5})/2<2$. Ensuite il vient que z^2 est majoré par 3, et x^2 par $3/(y-3)^2<3\ldots$

(b) S est bornée et fermée, donc compact, et f est continue... Weierstrass... une solution existe.

$\nabla h(x,y,z)=(2x(y-3)^2, 2x^2(y-3)+2y+1, 2z)^t=0$ implique (puisque $y\neq 3$ sur S) $(x,y,z)=(0,-1/2,0)$, mais ce point n'est pas sur S. Ceci vérifie l'hypothèse de la règle du multiplicateur (ou exclut le cas anormal). On procède à la recherche des candidats.

$\nabla f+\lambda\nabla h=0$ donne $\lambda 2x(y-3)^2=0$ ainsi que

$$1=-\lambda[2x^2(y-3)+2y+1],\ 2=-\lambda 2z.$$

Il vient $\lambda \neq 0$ et $x = 0$ (car $y \neq 3$ sur S) et $y = -(1+\lambda)/(2\lambda)$, $z = -1/\lambda$. On écrit ensuite $h = 0$ afin d'obtenir $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda = -1$ ou $+1$. La première possibilité identifie le point $(0,0,1)$ ($f = 2$, le max), la seconde $(0,-1,-1)$ ($f = -3$, le min recherché).

3. Il s'agit de prouver que le point $(1,1,2)$ est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\min f := (x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-7)^2 \text{ slc } g_1 \leqslant 0, g_2 \leqslant 0, h = 0,$$

où $g_1 = x^2 + xy + 2y^2 + z - 6$, $g_2 = e^x + y + z^2 - 8$, $h = x + 2y - 3z + 3$. On vérifie premièrement que ce point appartient à A (est admissible).

Puisque f, g_1 et g_2 sont convexes (on le vérifie) et h est affine, le problème est convexe. Alors il suffit (par un résultat du cours) de trouver un multiplicateur (au sens de John) normal $(1, \gamma_1, \gamma_2, \lambda)$ associé au point $(1,1,2)$. Parce que la contrainte $g_2 \leqslant 0$ n'est pas saturée, il faut $\gamma_2 = 0$ (écart).

La stationnarité du lagrangien devient, en générale,

$$\begin{aligned} 2(x-6) + (2x+y)\gamma_1 + \lambda &= 0 \\ 2(y-9) + (x+4y)\gamma_1 + 2\lambda &= 0 \\ 2(z-7) + \gamma_1 - 3\lambda &= 0, \end{aligned}$$

mais ici avec $(x,y,z) = (1,1,2)$ (la prétendue solution). On trouve alors que le choix $\gamma_1 = 4$ et $\lambda = -2$ satisfait ces équations.

Enfin, $(1,4,0,-2)$ satisfait toutes les propriétés d'un multiplicateur, incluant la positivité et la condition d'écart ; la conclusion s'ensuit. (L'unicité de la solution résulte de la convexité stricte de f.)

Rq : c'est la démarche illustrée CM5, page 39.