ISFA Optimisation   Cours de Francis Clarke

Examen partiel   premier décembre 2016

L'utilisation de documents de toute nature, de calculatrices, de consultants, de téléphones ou autres appareils électroniques n'est pas autorisée.

1. (8 pts) Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) := x^3+3xy^2-3x^2-3y^2+4$.

(a) Trouver et classifier les quatre points critiques de f.

(b) Si l'on cherche à réduire la valeur de f à partir du point $(3,1)$ par un petit déplacement, quelle est la direction la plus efficace ?

(c) Résoudre par la méthode déductive le problème de minimiser f sur l'ensemble $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\, |y| \leqslant 2\}$.

(d) On s'intéresse maintenant à la minimisation de la fonction

$$g(x,y) := \frac{100}{(x+1)(4+y)} + 5x + 2y$$

sur le même domaine A que ci-dessus. Prouver que $\min_A g$ est atteint, qu'il est atteint uniquement en un seul point, et identifier ce point.

2. (6 pts) On s'intéresse à la surface de niveau S dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$h(x,y,z) := x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 = 0.$$

(a) Montrer que tout point $(x,y,z) \in S$ satisfait $|y| \leqslant 2$. En déduire ensuite que S est bornée.

(b) Résoudre le problème de minimiser la fonction $f(x,y,z) := y + 2z$ sous la contrainte $h(x,y,z) = 0$, à l'aide de la règle du multiplicateur.

3. (6 pts) Une *projection* d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ veut dire un point x_* dans A qui est le plus proche à x_0 ; autrement dit : qui minimise $x \mapsto \|x - x_0\|_2$ par rapport à $x \in A$. Soit A l'ensemble

$$\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+xy+2y^2+z \leqslant 6,\ e^x+y+z^2 \leqslant 8,\ x+2y-3z+3 = 0\,\}.$$

Prouver que le point $(1,1,2)$ est l'unique projection du point $(6,9,7)$ sur A.