

CM6

Optimisation

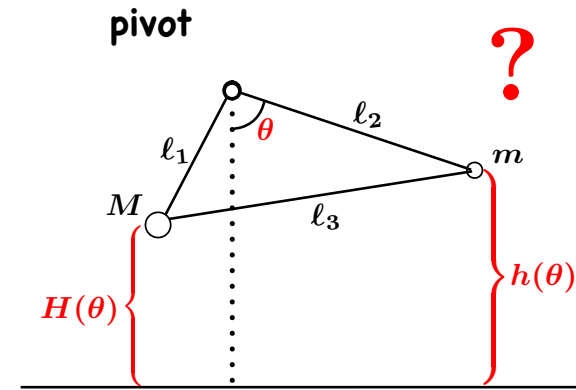
automne 2016

cours de
Francis Clarke

clarke@math.univ-lyon1.fr

optimisation :

dimension finie, dimension infinie



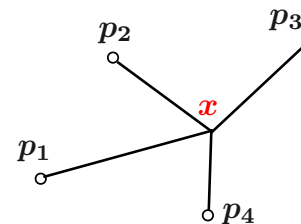
À l'équilibre, l'angle θ sera celui qui minimise la fonction $f(\theta) := MH(\theta) + mh(\theta)$

(Euler, d'Alembert, Maupertuis...)

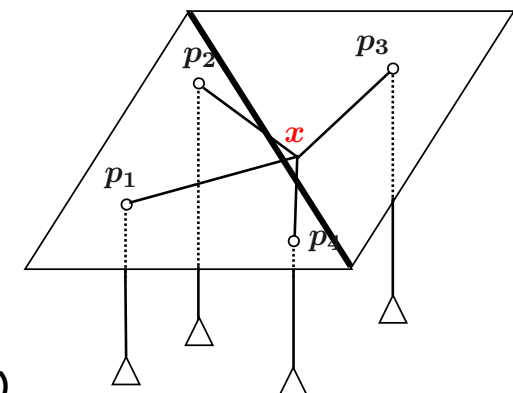
Exemple : Problème de Torricelli / Steiner, $n = 4$

On cherche le point x central par rapport à p_1, p_2, p_3, p_4 : x minimise

$$|p_1 - x| + |p_2 - x| + |p_3 - x| + |p_4 - x|$$



Solution par mobilier :



A l'équilibre, le point x minimise l'énergie potentielle du système (principe de d'Alembert)

En 1744 démarre un nouveau sujet :

optimisation continue

optimisation par rapport aux fonctions

optimisation en dimension infinie

optimisation des intégrales

calcul des variations



(c'est une des grandes idées du cours)

5

Optimisation

Rien se passe dans l'univers sans qu'un principe de maximum ou de minimum soit concerné.

Leonhard Euler

Cette phrase paraît dans la célèbre monographie de Euler de 1744, concernant l'optimisation dans le cas où les inconnues sont des fonctions (des courbes).

7

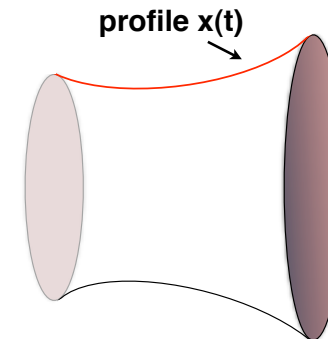
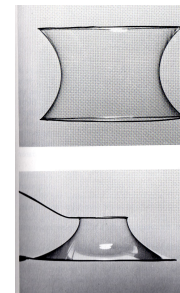


Leonhard Euler

1707-1783

6

Un exemple de Euler



aire de la surface

$$\min_{x(\cdot)} \int_a^b x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2} dt \Rightarrow \text{minimiser}$$

8

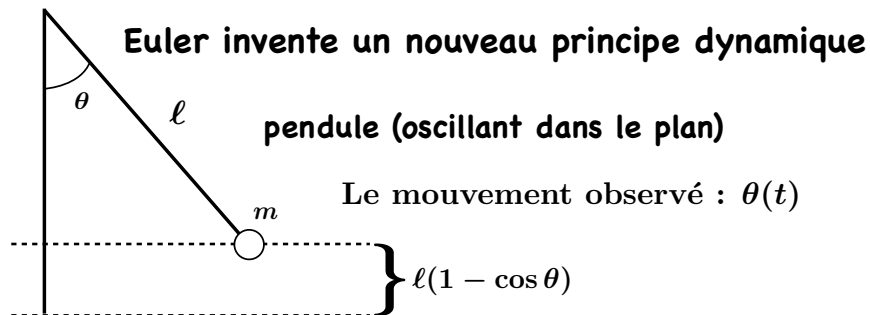
Monographie de 1744 :

*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi
Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio
Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu*

Le problème de base en calcul des variations :

$$\min J(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt : x(a) = A, x(b) = B$$

Euler définit le problème, trouve la condition nécessaire de base, introduit la technique des multiplicateurs, formule le principe de moindre action, et donne 100 exemples.



Il définit l'action :

$$K - V = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} m (\ell \theta'(t))^2}_{\text{énergie cinétique}} - \underbrace{mg\ell(1 - \cos \theta(t))}_{\text{énergie potentielle}} \right\} dt$$

**Alors le mouvement est celui qui minimise l'action :
principe du moindre action**

9

Le problème de base en calcul des variations

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, x(b) = B.$$

L = le lagrangien

$$\min_{x(\cdot)} \int_a^b x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2} dt \quad \Rightarrow \quad L(t, x, v) = x \sqrt{1 + v^2}$$

$$K - V = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} m (\ell \theta'(t))^2 - mg\ell(1 - \cos \theta(t)) \right\} dt$$

$$\Rightarrow L(t, x, v) = \frac{1}{2} m (\ell v)^2 - mg\ell(1 - \cos x)$$

11

Un exemple en gestion de la production

On doit produire entre $t = 0$ et $t = T$ une quantité $\bar{x}$ d'un bien. Le coût unitaire de sa production est $C(x, x')$; donc il dépend de la quantité x déjà produite ainsi que la vitesse x' de production.

En actualisant en $t = 0$, le coût associé à un profil $x(t)$ de production sera

$$\int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), x'(t)) x'(t) dt$$

Car produire un autre dx en temps dt coûte

$$C\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dx = C\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} dt = C(x, x'(t)) x'(t) dt$$

Il s'agit de minimiser cette intégrale sous les contraintes $x(0) = 0$ et $x(T) = \bar{x}$.

$$\Rightarrow L(t, x, v) = e^{-\delta t} C(x, v) v$$

10

12

On ouvre une parenthèse afin d'expliquer

le facteur $e^{-\delta t}$

Si le taux d'intérêt est de 5% et l'intérêt est simple, et si l'on verse 1€ dans son compte, on a, après un an, un solde de 1,05€.

Les taux d'intérêt sont donnés sur une base nominale (annuelle).

L'intérêt est en général composé n fois pendant la période.

$$n = 2 : \quad 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{0,05}{2}\right) \times \left(1 + \frac{0,05}{2}\right) = \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = 1,050625$$

$$n = 4 : \quad 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^4$$

$\vdots$

$$n = \infty : \quad 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0,05}{n}\right)^n = e^{0,05} = 1,0513$$

Le taux d'intérêt nominal δ appliqué continuellement est appelé le **taux d'actualisation** (*discount rate*).

Son effet : une somme S reçu à l'instant $t > 0$ équivaut à $e^{-\delta t} S$ en $t = 0$.

Le problème de base en calcul des variations

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, x(b) = B.$$

On prend les fonctions $x(\cdot)$ dans $C^2[a, b]$, et on suppose que L est de classe C^3 .

13

15

Le problème de base en calcul des variations

$$\text{Minimiser } \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

sous les contraintes $x(a) = A, x(b) = B$.

Le problème de base
en contrôle optimal :

Minimiser

$$\int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt$$

sous les contraintes

$$x'(t) = G(t, x(t), u(t)) \quad (t \in [0, T])$$

$$u(t) \in U \quad \forall t, \quad x(0), x(T) \text{ prescrits}$$

C'est le cas spécial
où $x' = u$ et la
contrainte $u \in U$
ne joue pas

**u = la commande
(le contrôle)**

x = l'état

14

16

Le problème de base en contrôle optimal

Minimiser

$$\int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt$$

sous les contraintes

$$x'(t) = G(t, x(t), u(t)) \quad (t \in [0, T])$$

$$u(t) \in U \quad \forall t, \quad x(0), x(T) \text{ prescrits}$$

Il sert beaucoup dans les applications modernes de l'optimisation (dynamique)

17

Etude du problème de base en calcul des variations

19

Le problème de base en contrôle optimal

Minimiser

$$\int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt$$

sous les contraintes

~~$$x'(t) = G(t, x(t), u(t)) \quad (t \in [0, T])$$~~

~~$$u(t) \in U \quad \forall t, \quad x(0), x(T) \text{ prescrits}$$~~

Dans ce cours,
on se limite au
calcul des variations

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, \quad x(b) = B.$$

18

Le problème de base (P) en calcul des variations :

$$\text{minimiser } J(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

$$\text{s.l.c. } x \in C^2[a, b], \quad x(a) = A, \quad x(b) = B.$$

Le problème de base (P), comme tout problème d'optimisation, se prête à l'approche déductive, et à diverses approches inductives (notamment la convexité)

On commence l'étude par la condition nécessaire principale.

20

Le suivant donne la première condition nécessaire qu'une solution x_* doit satisfaire.

Notation: Les dérivées partielles de la fonction $L(t, x, v)$ par rapport à x et v sont notées L_x et L_v .

Théorème (Euler 1744)

Si x_* est solution de (P), alors x_* satisfait l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \left\{ L_v(t, x_*(t), x'_*(t)) \right\} = L_x(t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Une fonction $x_* \in C^2[a, b]$ qui satisfait l'équation d'Euler est appelée une **extrémale**.

21

$$x_* \text{ minimise } f(x), x \in \mathbb{R}^n$$



(règle de Fermat)

$$\nabla f(x_*) = 0$$

$$x_* \text{ minimise } J(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$



(équation d'Euler)

$$\frac{d}{dt} \left\{ L_v(t, x_*(t), x'_*(t)) \right\} = L_x(t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

22

La preuve de Euler passe par la discrétisation, mais l'approche de Lagrange utilise les *variations* (d'où le nom du sujet). Ici, une variation veut dire une fonction $y \in C^2[a, b]$ telle que $y(a) = y(b) = 0$.

On fixe une telle variation y , et on considère la fonction g d'une seule variable suivante :

$$g(\lambda) = J(x_* + \lambda y) = \int_a^b L(t, x_* + \lambda y, x'_* + \lambda y') dt.$$

(Observer que certains arguments sont omis, pour alléger la notation.)

Il suit que g est dérivable, et que "la dérivée de l'intégrale est l'intégrale de la dérivée" :

$$g'(\lambda) = \int_a^b [L_x(t, x_* + \lambda y, x'_* + \lambda y') y + L_v(t, x_* + \lambda y, x'_* + \lambda y') y'] dt.$$

23

On remarque pour chaque λ , la fonction $x_* + \lambda y$ est admissible pour (P), d'où

$$g(\lambda) = J(x_* + \lambda y) \geq J(x_*) = g(0).$$

Il suit que g atteint un minimum en $\lambda = 0$. Par la règle de Fermat, $g'(0) = 0$; par conséquent :

$$\int_a^b [\alpha(t) y(t) + \beta(t) y'(t)] dt = 0,$$

où nous avons posé $g'(\lambda) = \int_a^b [L_x(t, x_* + \lambda y, x'_* + \lambda y') y + L_v(t, x_* + \lambda y, x'_* + \lambda y') y'] dt$.

$$\alpha(t) := L_x(t, x_*(t), x'_*(t)), \quad \beta(t) := L_v(t, x_*(t), x'_*(t)).$$

On invoque l'intégration par parties pour déduire

$$\int_a^b [\alpha(t) - \beta'(t)] y(t) dt = 0.$$

Puisque ceci a lieu pour toute variation y , il suit que la fonction (continue) qui est le coefficient de y doit s'annuler identiquement sur $[a, b]$. Mais c'est exactement la conclusion recherchée. □

24

Lemme. Supposons que la fonction F satisfait

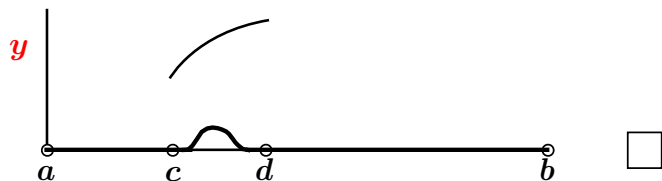
$$\int_a^b F(t)y(t) dt = 0$$

pour toute variation y . Alors F est identiquement zéro.

Démonstration.

Par l'absurde : si $F \not\equiv 0$, il existe un sous-intervalle $[c, d]$ sur lequel $F > 0$ (disons). Alors on construit

une variation y telle que $\int_a^b F(t)y(t)dt \neq 0$:



25

Exo en CM :

Ecrire l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dt} \{ L_v(t, x_*(t), x'_*(t)) \} = L_x(t, x_*(t), x'_*(t))$$

lorsqu'il s'agit de minimiser

$$\int_0^1 (x(t)^2 + x'(t)^2) dt \text{ s.l.c. } x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Résoudre si possible.

$$L(t, x, v) = x^2 + v^2; L_v = 2v; L_x = 2x \quad \text{forme développée}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ 2x' \} = 2x \quad \Rightarrow x'' = x$$

$$\text{forme initiale} \Rightarrow x(t) = ce^t + ke^{-t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^1 - e^{-1}}$$

27

Une fonction $x_* \in C^2[a, b]$ admissible pour (P) est appelée **minimum local** ou *solution locale* de (P) lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute fonction x admissible pour (P) et qui satisfait de plus

$$\|x - x_*\|_\infty < \delta, \quad \|x' - x'_*\|_\infty < \delta,$$

on a $J(x) \geq J(x_*)$.

Ici, pour deux fonctions continues $f(t)$ et $g(t)$, la notation $\|f - g\|_\infty$ veut dire

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|.$$

Rappel : Une fonction $x_* \in C^2[a, b]$ qui satisfait l'équation d'Euler est appelée une **extrémale**.

La démonstration ci-dessus est valable lorsque x_* n'est qu'un minimum local pour (P). On peut donc dire:

un minimum local pour (P) est forcément une extrémale.

26

le pendule

$$\min \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{m\ell^2}{2} \theta'(t)^2 - mg\ell(1 - \cos \theta(t)) \right\} dt$$

Ici on a

$$L(t, x, v) = \frac{m\ell^2}{2} v^2 + mg\ell \cos x - mg\ell,$$

d'où $L_v = m\ell^2 v$, $L_x = -mg\ell \sin x$.

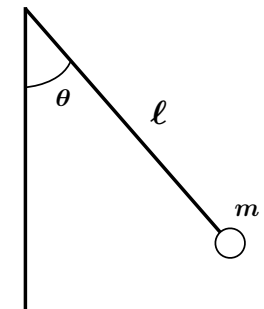
L'équation d'Euler devient

$$\frac{d}{dt} \{ m\ell^2 \theta' \} = -mg\ell \sin \theta$$

$$\Rightarrow \theta''(t) + (g/\ell) \sin \theta = 0.$$

On ne sait pas écrire sa solution.

(Mais si θ est petit, on remplace $\sin \theta$ par θ , et alors l'équation différentielle est linéaire...)



28

Retour à la pellicule savonneuse, où

$$L(t, x, v) = x\sqrt{1 + v^2}.$$

L'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{1 + x'(t)^2}} \right\} = \sqrt{1 + x'(t)^2}.$$

Sa résolution n'est pas évidente.

Corollaire (condition de Erdmann) Si x_* est solution locale du problème de base, et si L est autonome (ne dépend pas de t), alors il existe une constante c telle que

$$L(x_*(t), x'_*(t)) - x'_*(t)L_v(x_*(t), x'_*(t)) = c \quad \forall t \in [a, b].$$

Démonstration.

On dérive le côté gauche par rapport à t :

$$\begin{aligned} &= L_x(*)x'_* + L_v(*)x''_* - x''_*L_v(*) - x'_*\frac{d}{dt}L_v(*) \\ &= L_x(*)x'_* - x'_*L_x(*) = 0 \end{aligned}$$



Rq : on obtient ainsi une "première intégrale" de l'équation de Euler (dans le cas autonome)

Retour à la pellicule savonneuse, où $L(t, x, v) = x\sqrt{1 + v^2}$.

Puisque le problème est autonome, la condition d'Erdmann s'applique :

$$\begin{aligned} L - x'L_v = c &\implies x\sqrt{1 + x'^2} - x'\frac{xx'}{\sqrt{1 + x'^2}} = c \\ \implies \frac{x}{\sqrt{1 + x'^2}} = c &\implies x'^2 = \frac{x^2}{c^2} - 1 \\ \implies cx' = \sqrt{x^2 - c^2} \end{aligned}$$

(en supposant $x' > 0$ pour simplicité).

Cette edo est séparable :

$$c \frac{dx}{\sqrt{x^2 - c^2}} = dt \implies \int c \frac{dx}{\sqrt{x^2 - c^2}} = \int dt$$

On a alors

$$c \cosh^{-1}(x/c) = t + k \implies \boxed{x_*(t) = c \cosh\left(\frac{t + k}{c}\right)}$$

Cette courbe porte le nom *caténaire* (ou *chaînette*).

méthodes inductives

Pour le problème de minimiser

$$\int_0^1 (x(t)^2 + x'(t)^2) dt \quad \text{s.l.c.} \quad x(0) = 0, x(1) = 1,$$

on a vu qu'il y a un seul candidat, la fonction

$$x_*(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^1 - e^{-1}}$$

Peut-on dire que x_* est solution?

Pour appliquer la méthode déductive, il faudrait un théorème d'existence à la Weierstrass, ou coercivité...

Or l'existence en dimension infinie est un sujet complexe, où les avancées datent du 20e siècle (*analyse fonctionnelle*).

Autrement, il y a des méthodes inductives. Le premier à œuvrer dans cette direction fut Legendre (1783).

Théorème (Legendre 1783) Soit x_* un minimum local de (P). Alors x_* satisfait la condition de Legendre :

$$L_{vv}(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Exemple Pour

$$J(x) = \int_0^1 (x(t)^2 + x'(t)^2) dt$$

on trouve

$$L(t, x, v) = x^2 + v^2 \implies L_{vv} = 2,$$

ce qui est consistant avec l'existence d'un minimum local, mais *pas* un maximum local.

33

Ensuite, dans le même article, Legendre va plus loin. Inspiré sans doute par le fait que, dans $\mathbb{R}$, on a

$$f'(x_*) = 0, \quad f''(x_*) > 0 \implies$$

f admet un minimum local en x_* ,

Legendre prouve le théorème suivant (approche inductive):

Théorème (Legendre 1783) Soit x_* une extrémale qui satisfait la condition renforcée :

$$L_{vv}(t, x_*(t), x'_*(t)) > 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors x_* est un minimum local pour (P).

Mais c'est faux, archi-faux

35

Exemple Prenons

$$J(x) = \int_0^T (x'(t)^2 - x(t)^2) dt$$

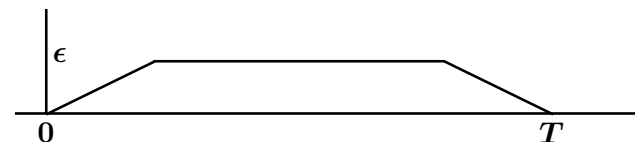
avec $x(0) = 0 = x(T)$.

L'équation de Euler est $x'' = -x$.

La fonction $x_*(t) \equiv 0$ est une extrémale admissible

On a $L_{vv} \equiv 2 > 0$.

Pourtant, quand T est très grand, il n'est pas optimal de rester en $x = 0$:



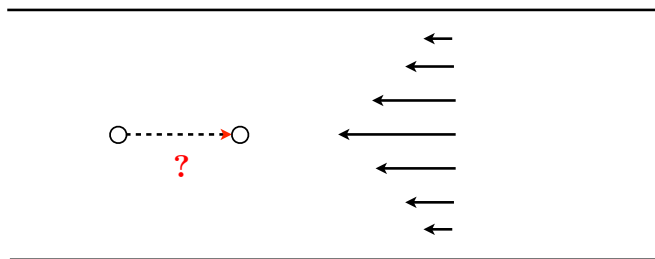
$$\text{La fonction } x(t) = \begin{cases} \epsilon t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \epsilon & \text{si } 1 \leq t \leq T-1 \\ \epsilon(T-t) & \text{si } T-1 \leq t \leq T \end{cases}$$

donne $J(x) < 0 = J(x_*)$ dès que $T \geq 4$.
(On peut arrondir un peu les deux coins.)

34

36

Exemple de la rivière



Remarque Quelle que soit la séparation entre les deux points, se déplacer sur le segment entre eux se défend toujours comme étant la meilleure stratégie à court terme !

Définition La fonction $x_* \in C^2[a, b]$ est appelé *minimum local à court terme* pour (P) lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout sous-intervalle $[c, d]$ de $[a, b]$ de longueur inférieure à δ , la fonction x_* restreinte à $[c, d]$ est un minimum local pour le problème tronqué de minimiser

$$\int_c^d L(t, x(t), x'(t)) dt$$

sous les contraintes $x(c) = x_*(c)$, $x(d) = x_*(d)$.

Théorème (Jacobi 1838) Soit x_* une extrémale sur $[a, b]$ qui satisfait la condition renforcée de Legendre: $L_{vv}(t, x_*(t), x'_*(t)) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Alors x_* est un minimum local à court terme pour (P).

Il suit que le principe de moindre action est un vrai principe de minimisation, mais localement dans l'espace, et à court terme dans le temps.

37

Une autre méthode inductive nous est disponible : la convexité (inconnue de nos illustres ancêtres)

Définition On dira que le problème de base (P) est convexe lorsque, pour chaque $t \in [a, b]$, la fonction $(x, v) \mapsto L(t, x, v)$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème Si x_* est une extrémale admissible pour (P), et si la fonction $(x, v) \mapsto L(t, x, v)$ est convexe pour chaque $t \in [a, b]$, alors x_* est solution globale de (P).

Exemple Pour

$$\min \int_0^1 (x(t)^2 + x'(t)^2) dt \quad \text{s.l.c.} \quad x(0) = 0, x(1) = 1,$$

on a vu qu'il y a un seul candidat, la fonction

$$x_*(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^1 - e^{-1}}.$$

La fonction $(x, v) \mapsto L(x, v) = x^2 + v^2$ est visiblement convexe. Donc ce problème est convexe, et le candidat est l'unique solution, un minimum global.

39

Théorème Si x_* est une extrémale admissible pour (P), et si la fonction $(x, v) \mapsto L(t, x, v)$ est convexe pour chaque $t \in [a, b]$, alors x_* est solution globale de (P).

Démonstration On pose (en utilisant le fait que x_* est une extrémale)

$$p(t) = L_v(t, x_*, x'_*), \quad p'(t) = L_x(t, x_*, x'_*).$$

Soit $x \in C^2[a, b]$ une fonction admissible pour (P). Alors

$$\begin{aligned} J(x) - J(x_*) &= \int_a^b \{L(t, x, x') - L(t, x_*, x'_*)\} dt \\ &\geq \int_a^b (p', p) \cdot (x - x_*, x' - x'_*) dt \end{aligned}$$

(par l'inégalité sous-différentielle, puisque $(p', p) = \nabla_{x,v} L(t, x_*, x'_*)$)

$$= \int_a^b (d/dt) \{p \times (x - x_*)\} dt = 0,$$

puisque x et x_* ont les mêmes valeurs en a et b . $\square$

38

40

conditions suffisantes : résumé

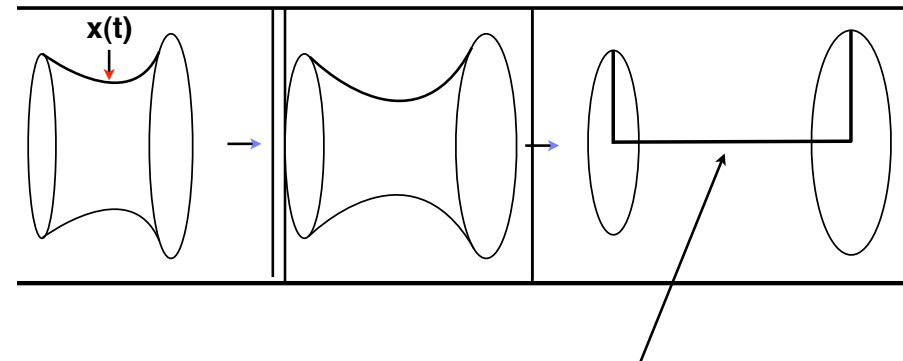
Théorème (Jacobi 1838) Soit x_* une extrémale sur $[a, b]$ qui satisfait la condition renforcée de Legendre: $L_{vv}(t, x_*(t), x'_*(t)) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Alors x_* est un minimum local à court terme pour (P).

Théorème Si x_* est une extrémale admissible pour (P), et si la fonction $(x, v) \mapsto L(t, x, v)$ est convexe pour chaque $t \in [a, b]$, alors x_* est solution globale de (P).

c'est des approches inductives

41

Retour à la pellicule savonneuse : solutions non lisses



La solution de Goldschmidt (1831)

43

Qu'en est-il de la méthode déductive ?

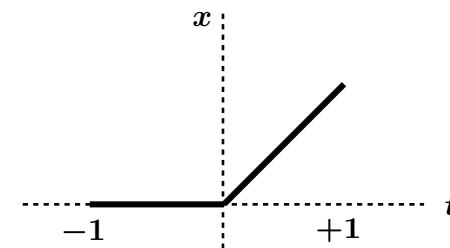
Il faudrait des théorèmes d'existence

42

exemple

$$\min \int_{-1}^1 x^2 (x' - 1)^2 dt : x(-1) = 0, x(1) = 1.$$

aucune fonction lisse réalise le inf dans ce problème



On peut énoncer un théorème d'existence qui ne sort pas de la classe C^2 :

44

Théorème On suppose que le lagrangien $L(t, x, v)$ satisfait :

(1) $L_{vv}(t, x, v) > 0 \quad \forall (t, x, v)$ (donc L est strictement convexe par rapport à v) ;

(2) Pour des constantes $\alpha > 0, p > 1$ et β, L satisfait la condition de coercivité:

$$L(t, x, v) \geq \alpha |v|^p + \beta \quad \forall (t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On suppose en outre que l'une des hypothèses supplémentaires suivantes soit vérifiée:

(3a) (Tonelli-Morrey) Il existe des constantes c et d telles que, pour tout (t, x, v) , on a

$$|L_x(t, x, v)| + |L_v(t, x, v)| \leq c(|v| + |L(t, x, v)|) + d;$$

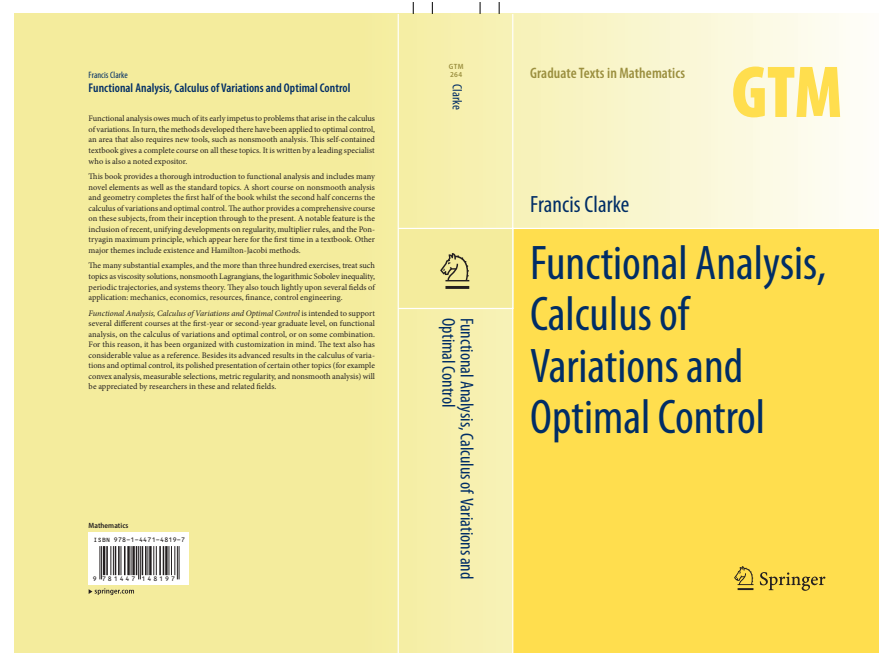
(3b) (Clarke-Vinter) Le lagrangien L est autonome.

Alors le problème (P) admet une solution $x_* \in C^2[a, b]$.

L'étude de l'existence nécessite l'utilisation d'outils de l'analyse fonctionnelle : intégrale de Lebesgue, semicontinuité, Arzelà-Ascoli, dualité des espaces de Banach, compacité faible...

réf : "Functional analysis, calculus of variations and optimal control" par F. Clarke

Graduate Texts in Mathematics 264
Springer-Verlag 2013



Théorème On suppose que le lagrangien $L(t, x, v)$ satisfait :

(1) $L_{vv}(t, x, v) > 0 \quad \forall (t, x, v)$ (donc L est strictement convexe par rapport à v) ;

(2) Pour des constantes $\alpha > 0, p > 1$ et β, L satisfait la condition de coercivité:

$$L(t, x, v) \geq \alpha |v|^p + \beta \quad \forall (t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On suppose en outre que l'une des hypothèses supplémentaires suivantes soit vérifiée.

(3a) (Tonelli-Morrey) Il existe des constantes c et d telles que, pour tout (t, x, v) , on a

$$|L_x(t, x, v)| + |L_v(t, x, v)| \leq c(|v| + |L(t, x, v)|) + d;$$

(3b) (Clarke-Vinter) Le lagrangien L est autonome.

Alors le problème (P) admet une solution $x_* \in C^2[a, b]$.

le problème isopérimétrique

le problème de base

Minimiser

$$J(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, x(b) = B.$$

Le **problème isopérimétrique** introduit par Euler est celui de minimiser la même fonctionnelle $J(x)$ que pour (P), et sous les mêmes contraintes au bord, mais sous une contrainte supplémentaire :

$$\int_a^b H(t, x(t), x'(t)) dt = c.$$

Théorème Soit $x_* \in C^2[a, b]$ solution du problème isopérimétrique. Alors il existe un couple $(\eta, \lambda) \neq 0$ avec $\eta = 0$ ou 1 tel que x_* soit une extrémale du lagrangien $\eta L + \lambda H$.

un problème isopérimétrique plus général

Le *problème isopérimétrique* en calcul des variations est celui de minimiser la même fonctionnelle $J(x)$ que pour (P), et sous les mêmes contraintes au bord, mais sous deux contraintes supplémentaires:

$$\int_a^b G(t, x(t), x'(t)) dt \leq 0, \quad \int_a^b H(t, x(t), x'(t)) dt = 0.$$

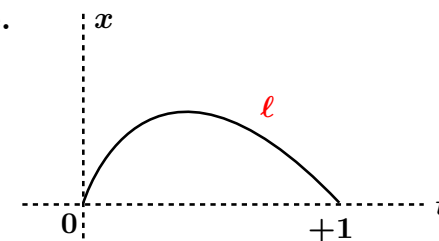
Théorème (règle du multiplicateur) Soit $x_* \in C^2[a, b]$ solution du problème isopérimétrique. Alors il existe un triplet $(\eta, \gamma, \lambda) \neq 0$ avec $\eta = 0$ ou 1 et $\gamma \geq 0$, tel que

$$\int_a^b G(t, x_*(t), x'_*(t)) dt < 0 \implies \gamma = 0$$

et tel que x_* soit une extrémale du lagrangien $\eta L + \gamma G + \lambda H$.

exemple : le problème de Didon

Parmi toutes les courbes $x(t)$ sur $[0, 1]$ qui satisfont les conditions au bord $x(0) = 0 = x(1)$, et qui sont de longueur prescrite ℓ , trouver celle qui maximise l'aire sous la courbe.



Formulation mathématique :

$$\min \int_0^1 -x(t) dt : x(0) = 0, x(1) = 0, \int_0^1 \sqrt{1 + x'(t)^2} dt = \ell.$$

On regarde les extrémales de $-\eta x + \lambda \sqrt{1 + v^2}$.

Le cas $\eta = 0$

L'équation d'Euler du lagrangien $\lambda \sqrt{1 + v^2}$
(pour $\lambda \neq 0$) est

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\lambda x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \right\} = 0 \implies \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = c$$

$\implies x'$ est toujours du signe de c , et

$$\begin{aligned} x'^2 &= c^2(1 + x'^2) \\ \implies x'^2(1 - c^2) &= c^2 \\ \implies x' &= \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \end{aligned}$$

Donc x est affine, $x \equiv 0$, possible seulement
si $\ell = b - a$, problème dégénéré.

On prend alors $\eta = 1$

On regarde les extrémales de $-\eta x + \lambda \sqrt{1 + v^2}$.

Le cas $\eta = 1$

L'équation d'Euler du lagrangien $-x + \lambda \sqrt{1 + v^2}$
est

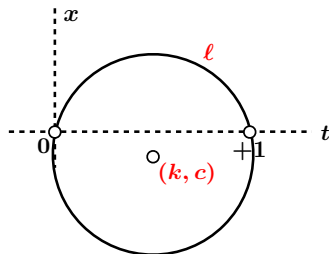
$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\lambda x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \right\} = -1 \implies \frac{\lambda x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = -t + k$$

$\implies$ (en prenant $\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-t + k}{\sqrt{\lambda^2 - (t - k)^2}} \\ \implies x - c &= \sqrt{\lambda^2 - (t - k)^2} \\ \implies (x - c)^2 + (t - k)^2 &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Les cdns au bord sont satisfaites
quand $c^2 = \lambda^2 - \frac{1}{4}$

Ensuite la condition que la longueur
vaut ℓ donne c et λ .



On invoque la symétrie
pour deviner que $k = \frac{1}{2}$

A-t-on la réponse ?

53

On a trouvé une extrémale admissible de $-x + \lambda \sqrt{1 + v^2}$
pour un $\lambda > 0$.

convexe en (x, v)

Il suit que pour toute fonction x qui s'annule au bord,
on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-x + \lambda \sqrt{1 + x'^2}) dt &\geq \int_0^1 (-x_* dt + \lambda \sqrt{1 + x_*'^2}) dt \\ &= J(x_*) + \lambda \ell \end{aligned}$$

Si l'on impose en plus que la longueur de x soit ℓ , on
découvre

$$\begin{aligned} J(x) + \lambda \ell &\geq \int_0^1 (-x_* dt + \lambda \sqrt{1 + x_*'^2}) dt \\ &= J(x_*) + \lambda \ell \\ \implies J(x) &\geq J(x_*). \end{aligned} \quad \text{donc on a vraiment la solution}$$

Rq : on peut ensuite procéder à résoudre le problème
isopérimétrique de l'antiquité

55

résumé de ce qu'il faut savoir

Le problème de base en calcul des variations

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, x(b) = B.$$

On prend les fonctions $x(\cdot)$ dans $C^2[a, b]$, et
on suppose que L est de classe C^3 .

54

56

conditions nécessaires

Théorème (Euler 1744)

Si x_* est solution de (P), alors x_* satisfait l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \left\{ L_v(t, x_*(t), x'_*(t)) \right\} = L_x(t, x_*(t), x'_*(t)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Corollaire (condition de Erdmann) Si x_* est solution locale du problème de base, et si L est autonome (ne dépend pas de t), alors il existe une constante c telle que

$$L(x_*(t), x'_*(t)) - x'_*(t)L_v(x_*(t), x'_*(t)) = c \quad \forall t \in [a, b].$$

Théorème (Legendre 1783) Soit x_* un minimum local de (P). Alors x_* satisfait la condition de Legendre :

$$L_{vv}(t, x_*(t), x'_*(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

conditions suffisantes

Théorème (Jacobi 1838) Soit x_* une extrémale sur $[a, b]$ qui satisfait la condition renforcée de Legendre: $L_{vv}(t, x_*(t), x'_*(t)) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Alors x_* est un minimum local à court terme pour (P).

Théorème Si x_* est une extrémale admissible pour (P), et si la fonction $(x, v) \mapsto L(t, x, v)$ est convexe pour chaque $t \in [a, b]$, alors x_* est solution globale de (P).

problème isopérimétrique : règle du multiplicateur

Le problème isopérimétrique en calcul des variations est celui de minimiser la même fonctionnelle $J(x)$ que pour (P), et sous les mêmes contraintes au bord, mais sous deux contraintes supplémentaires:

$$\int_a^b G(t, x(t), x'(t)) dt \leq 0, \quad \int_a^b H(t, x(t), x'(t)) dt = 0.$$

Théorème (règle du multiplicateur) Soit $x_* \in C^2[a, b]$ solution du problème isopérimétrique. Alors il existe un triplet $(\eta, \gamma, \lambda) \neq 0$ avec $\eta = 0$ ou 1 et $\gamma \geq 0$, tel que

$$\int_a^b G(t, x_*(t), x'_*(t)) dt < 0 \implies \gamma = 0$$

et tel que x_* soit une extrémale du lagrangien $\eta L + \gamma G + \lambda H$.

Les grandes idées de ce cours (en optimisation)

La méthode déductive

La convexité des fonctions

Les multiplicateurs

L'optimisation des intégrales

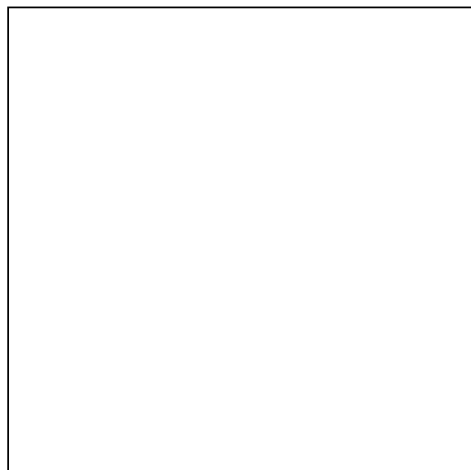
Le principe de moindre action

Le court-terme / le long-terme en optimisation dynamique

Euler
1744

En partant : Fiche TD 4

61



Fin des diapos du 6-ième cours

62