Optimisation

CM3

automne 2016

cours de
Francis Clarke

clarke@math.univ-lyon1.fr

Les fonctions convexes

Rappel

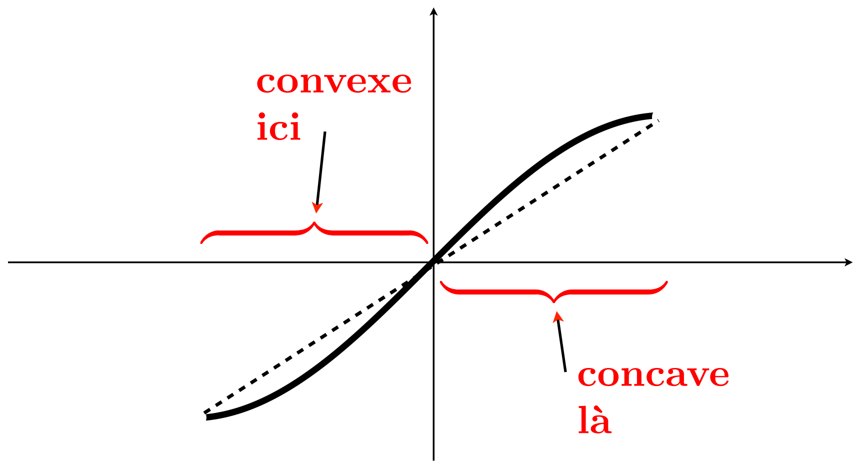
Soit U un convexe dans $\mathbf{R}^n$

Définition Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *convexe sur U* si

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

$$\forall\, x, y \in U,\ t \in [0,1].$$

Une fonction g est concave quand la fonction $-g$ est convexe.



Il est utile d'avoir certains critères directs pour vérifier la convexité (ou son absence).

1. critère de premier ordre

Théorème Soit U une partie convexe dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable autour de U.

Alors f est convexe sur U ssi

inégalité sous-différentielle

$$f(y) - f(x) \geqslant \nabla f(x) \bullet (y - x)\,, \quad x, y \in U. \quad (*)$$

2. critère de second ordre

Théorème Soit U un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable. Alors f est convexe sur U ssi

$$\nabla^2 f(x) \underset{}{\overset{\text{sdp}}{\geq}} 0\,, \quad x \in U. \quad (**)$$

Comment reconnaître qu'une matrice symétrique est dp ou sdp ?

On peut utiliser la définition, et étudier la forme quadratique de M

ou :

Théorème (critère des valeurs propres) Soit M une matrice $n \times n$ symétrique. Alors $M > 0$ (définie positive) ssi toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

On a $M \geq 0$ (semi-définie positive) ssi toutes ses valeurs propres sont positives au sens large.

Comment reconnaître qu'une matrice symétrique est dp ou sdp ?

Pour les matrices symétriques 2×2

Une matrice M symétrique 2×2 est définie positive ssi son déterminant $\text{dét}\, M$ et sa trace $\text{tr}\, M$ satisfont

$$\text{dét}\, M > 0\,, \quad \text{tr}\, M > 0\,.$$

Elle est semi-définie positive ssi

$$\text{dét}\, M \geq 0\,, \quad \text{tr}\, M \geq 0\,.$$

(preuve: $\text{dét} = \lambda_1 \lambda_2$ et $\text{tr} = \lambda_1 + \lambda_2 \ldots$)

Comment reconnaître qu'une matrice symétrique est dp ou sdp ?

Théorème (critère de Sylvester) Soit M une matrice $n \times n$ symétrique. Alors $M > 0$ (définie positive) ssi ses n sous-matrices principales *initiales* sont de déterminant strictement positif.

Il s'agit de commencer en haut à gauche :

$$\begin{bmatrix} m_{11} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \ldots \text{etc.}$$

Parfois la fonction coût est convexe (exemple: moindre carrés) et parfois pas (exemple: le caniveau, où la fonction à maximiser n'est pas concave).

La convexité est très présente dans certaines applications modernes (finances, gestion, éco, jeux, stats).

Il convient d'apprécier son rôle en optimisation, incluant le numérique.

Le rôle de la convexité en optimisation

Proposition Soit U un convexe ouvert, et soit f une fonction convexe et différentiable sur U. On se donne $x_* \in U$. Alors

f atteint un minimum local en x_*
$\iff$ f atteint un minimum global en x_* (par rapport à U)
$\iff$ $\nabla f(x_*) = 0$

Démonstration:

> f est convexe sur U ssi
>
> $$f(y) - f(x) \geqslant \nabla f(x) \bullet (y - x), \quad x, y \in U. \quad (*)$$

$\square$

> **Exemple** Minimiser la fonction
>
> $$f(x,y) = x^2 + 4xy + 9x + 11y + y^3 + 6y^2$$
>
> sur le demi-plan $\{(x,y) : y \geq 0\}$.

On a montré que f est convexe sur un ouvert convexe U contenant l'ensemble $A = \{(x,y) : y \geq 0\}$, et que

$$\nabla f(-\tfrac{13}{2}, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ceci prouve que $\min_A f$ est atteint au point $(-\frac{13}{2}, 1)$, puisque (par la convexité) $\min_U f$ est atteint en ce point. $\square$

C'est une approche inductive; on n'a pas à prouver l'existence a priori, étudier la frontière, classifier le point...

Rappel

Classification des points critiques

Lorsqu'un point critique x_* satisfait dét $\nabla^2 f(x_*) \neq 0$, on dit qu'il est *non dégeneré*.

(aucune valeur propre = 0)

Dans ce contexte, x_* est soit :

- un minimum local (quand $\nabla^2 f(x_*) > 0$) (toute valeur propre > 0)
- un maximum local (quand $\nabla^2 f(x_*) < 0$) (toute valeur propre < 0)
- un *point selle* (dans les autres cas). (au moins une valeur propre de chaque signe)

Proposition Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui est localement C^2 autour d'un point x_* où

$$\nabla f(x_*) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x_*) > 0.$$

Alors x_* correspond à un minimum local.

Démonstration Il existe une boule $U := B^\circ(x_*, r)$ autour de x_* dans laquelle $\nabla^2 f > 0$.

Donc f est convexe sur U (par le critère hessien).

Mais $\nabla f(x_*) = 0$.

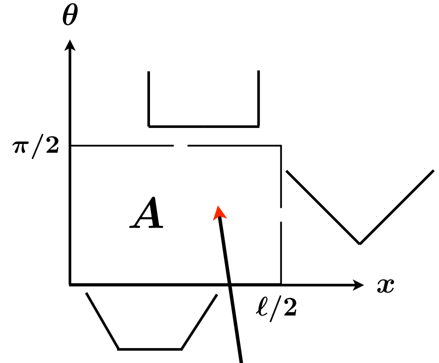
Donc f atteint en x_* un minimum par rapport à U (c-à-d, un minimum local) par la convexité. $\square$

Rq : Il s'agit en fait d'un minimum local *stricte* sur U (c-à-d, atteint uniquement en x_*), car f est *strictement convexe* sur U.

Rq :

Dans la recherche d'un min ou max global, la caractérisation locale d'un point critique n'est pas pertinente en générale

Rappel : le caniveau $\quad f(x, \theta) = x \sin\theta[\ell - 2x + x\cos\theta]$

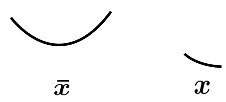


On cherche à maximiser f (qui n'est pas concave) sur A

le gagnant... c'est un max local bien sûr, mais cela n'importe pas

un résultat (faux) qui est parfois cité

Proposition Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable, et soit $\bar{x}$ le *seul* point critique de f. Si $\nabla^2 f(\bar{x}) > 0$, alors $\bar{x}$ minimise f (globalement) sur $\mathbb{R}^n$.



Démonstration ($n = 1$) On a $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) > 0$, donc $\bar{x}$ fournit un min local pour f. En fait, il existe $r > 0$ tel que $f'' > 0$ sur l'intervalle $]\bar{x} - r, \bar{x} + r[$ (car f'' est continue) ; du coup, f' est une fonction croissante sur $]\bar{x} - r, \bar{x} + r[$.

On a alors $f'(x) < 0$ pour $x \in]\bar{x} - r, \bar{x}[$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]\bar{x}, \bar{x} + r[$.

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $\hat{x}$ qui satisfait $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$. On considère le cas $\hat{x} > \bar{x}$, l'autre cas étant similaire.

Par le théorème des accroissements finis, $\exists\, z \in]\bar{x}, \hat{x}[$ tel que

$$0 < f(\bar{x}) - f(\hat{x}) = f'(z)(\bar{x} - \hat{x}).$$

On en déduit que $f'(z) < 0$. Mais f', qui est continue, est positif sur $]\bar{x}, \bar{x} + r[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point dans l'intervalle $]\bar{x}, z[$ ou $f' = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\bar{x}$ est l'unique point critique. $\blacksquare$

un contre-exemple en deux dimensions

Soit $f(x,y) := x^3 - 3xe^y + e^{3y}$. Il est clair que f n'admet pas de min global, puisque

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x + 1 \;=\; -\infty.$$

On montre que $(1,0)$ est le seul point critique de f :

$$\nabla f(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} 3x^2 - 3e^y \\ 3e^{3y} - 3xe^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^y \\ e^{2y} \end{bmatrix}$$
$$\implies e^{4y} = e^y \implies y = 0 \implies x = 1\,.$$

La matrice hessienne :

$$\nabla^2 f(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} 6x & -3e^y \\ -3e^y & 9e^{3y} - 3xe^y \end{bmatrix} \implies \nabla^2 f(1,0) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} > 0\,.$$

Rq : Soit A_r le pavé $[1-r, 1+r] \times [-r, r]$.

Pour $r > 0$ assez petit, $\min_{A_r} f$ est atteint uniquement en $(1,0)$.

Pour une certaine (première) valeur $\bar{r}$, on trouve que $\min_{A_{\bar{r}}} f$ est atteint *et* en $(1,0)$ *et* sur la frontière de $A_{\bar{r}}$.

Ensuite, pour $r > \bar{r}$, $\min_{A_r} f$ est atteint *uniquement* sur la frontière de A_r.

les cas de figure d'un problème type

un problème type

On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé

$$A \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\; -1 \le y \le 1\}.$$

On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).

Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.

Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

Exemple 1 :
$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3$

$f(0,0) = -3$

On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé

$$A \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\; -1 \le y \le 1\}.$$

On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).

Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.

Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ 4y + 4 \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 \\ +4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Il suit que f n'a même pas un minimum local en $(0,0)$ (par la règle de Fermat, *condition nécessaire*). Encore moins le minimum par rapport à A.

Affirmation réfutée

Rq: On aurait pu aussi faire état du point $(1,-1)$, où $f = -8$.

Exemple 2 :

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$

$f(0,0) = 4$

On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}.$$

On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).

Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.

Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 6x \\ 6xy - 6y \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On calcule ensuite

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x - 6 & 6y \\ 6y & 6x - 6 \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Il suit que f n'a même pas un minimum local en $(0,0)$, par la *condition nécessaire* $\nabla^2 f(0,0) \succeq 0$ (sdp).

Encore moins le minimum par rapport à A.

Rq: $f(-1,-1) = -6$.

Affirmation réfutée

Exemple 3 :

$f(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + xy + 4$

$f(0,0) = 4$

On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}.$$

On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).

Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.

Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} x^4 + 2xy^3 + 18x + y \\ 3x^2y^2 + 16y + x \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On calcule ensuite

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 + 2y^3 + 18 & 6xy^2 + 1 \\ 6xy^2 + 1 & 6x^2y + 16 \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \succ 0$ ($\Longrightarrow$ sdp).

On en déduit qu'un min local existe en $(0,0)$. Mais il n'est certainement pas global par rapport à $\mathbb{R}^2$, puisque

$$\lim_{y \to -\infty} f(1,y) = \lim_{y \to -\infty} y^3 + 8y^2 + y + \frac{66}{5} = -\infty.$$

Exemple 3 (suite et fin) :

$f(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + xy + 4$

On a déduit qu'un min local existe en $(0,0)$. Mais il n'est pas global par rapport à $\mathbb{R}^2$.

Peut-on prouver qu'il s'agit d'un min par rapport à A ?

On a calculé

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 + 2y^3 + 18 & 6xy^2 + 1 \\ 6xy^2 + 1 & 6x^2y + 16 \end{bmatrix}.$$

Lorsque $(x,y) \in A$, les éléments sur la diagonale valent au moins 12 et 10. Il suit que

$$\operatorname{tr} \nabla^2 f(x,y) \ge 22 \text{ et dét } \nabla^2 f(x,y) \ge 12 \times 10 - 7 \times 7 = 71.$$

On en déduit $\nabla^2 f(x,y) \succ 0$ (dp) pour $(x,y) \in A$, ce qui implique que f est (strictement) convexe sur A. Alors le point critique $(0,0)$ correspond à un min global par rapport à A (et unique).

Affirmation confimée

Exemple 4 :

(contre-exemple translaté)

$f(x,y) = (x+1)^3 - 3(x+1)e^y + e^{3y}$

$f(0,0) = -1$

On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}.$$

On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).

Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.

Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3(x+1)^2 - 3e^y \\ -3(x+1)e^y + 3e^{3y} \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On calcule ensuite

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6(x+1) & -3e^y \\ -3e^y & -3(x+1)e^y + 9e^{3y} \end{bmatrix}$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \succ 0$ ($\Longrightarrow$ sdp).

Il est clair que la matrice hessienne n'est pas sdp lorsque $x = -1$ (par exemple), son déterminant étant négatif. Donc f n'est pas convexe sur A (hélas). Comment procéder ?

Il faut trouver les autres candidats (dans l'intérieur, et sur la frontière) et les comparer à $(0,0)$...

Les points critiques dans int A

$f(0,0) = -1$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3(x+1)^2 - 3e^y \\ -3(x+1)e^y + 3e^{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies (x,y) = (0,0)$$

(comme dans le contre-exemple)

Donc aucun autre point critique à étudier, tout se joue sur la frontière.

Etude de fr A

$f(-1,y) = e^{3y} > 0 \implies$ sans intérêt

$f(1,y) = 8 - 6e^y + e^{3y} > -1$ (en testant ± 1 et le seul pt crit $\ln 2/2$)

$f(x,1) = (x+1)^3 - 3(x+1)e + e^3 \geq e^3 - 6e > 0$

$$f(x,-1) = g(x) = (x+1)^3 - 3(x+1)e^{-1} + e^{-3}.$$

On trouve $g''(x) = 6(x+1)$, donc $g'' \geq 0$ sur $[-1,1]$, et du coup g est convexe sur cet intervalle. Le seul point critique $\bar{x}$ de g dans l'intervalle satisfait $\bar{x}+1 = e^{-1/2}$. Celui-ci donne alors le min de g sur l'intervalle. On calcule $g(\bar{x}) = e^{-3} - 2e^{-3/2}$, et on montre que ceci $> -1 = f(0,0)$.

Affirmation confimée

deux renforcements de la convexité

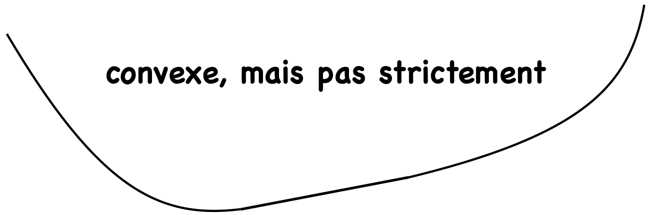
La convexité stricte

Définition Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0,1].$$

Définition La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *strictement convexe* si

$$x \neq y,\ t \in \,]0,1[\ \implies\ f\big((1-t)x+ty\big) < (1-t)f(x)+tf(y).$$



Définition La fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *strictement convexe* si

$$x, y \in U,\ x \neq y,\ t \in \,]0,1[\ \implies\ f\big((1-t)x+ty\big) < (1-t)f(x)+tf(y).$$

Proposition. Soit U une partie convexe dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Alors le minimum de f sur U est atteint en au plus un point.

Remarque. Si f est convexe et g est strictement convexe, alors la somme $f + g$ est strictement convexe.

Un critère d'ordre deux:

Proposition. Soit U un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dans $C^2(U)$ telle que $\nabla^2 f(x) > 0 \; \forall x \in U$. Alors f est strictement convexe sur U.

Lemme Soit h de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $h''(t) > 0 \, \forall t$. Alors

$$h(t) < (1-t)h(0) + th(1), \quad 0 < t < 1.$$

Preuve. On veut prouver

$$(1-t)[h(t) - h(0)] < t[h(1) - h(t)].$$

Par le théorème des accroissements finis, le terme à gauche vaut $(1-t)th'(a)$ et celui à droite $t(1-t)h'(b)$, où $a < b$. Puisque h' est strictement croissante, on obtient la conclusion.

Preuve de la proposition: Soient x et y deux points distincts dans U. On pose $h(t) := f(x + t(y-x))$, et on trouve

$$h''(t) = \nabla^2 f(x + t(y-x))(y-x) \bullet (y-x) > 0\,,$$

puisque $\nabla^2 f > 0$. Ceci nous permet d'invoquer le lemme, qui donne directement la conclusion. $\square$

Remarque. Ce critère d'ordre deux est suffisant mais pas nécessaire pour la convexité stricte.

Par exemple, la fonction $t \mapsto f(t) = t^4$ est strictement convexe, mais $f''(0) = 0$.

On admet le résultat suivant, qui invoque une inégalité sous-différentielle stricte :

Théorème Soit U une partie ouverte et convexe dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) f est strictement convexe sur U

(b) $f(y) - f(x) > \nabla f(x) \bullet (y-x), \quad x, y \in U,\ x \neq y$

L'inégalité sous-différentielle stricte

La convexité forte

Définition Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y), \quad x, y \in U,\ t \in [0,1].$$

Définition La fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *strictement convexe* si

$$x, y \in U,\ x \neq y,\ t \in\ ]0,1[\ \Longrightarrow\ f((1-t)x+ty) < (1-t)f(x)+tf(y).$$

Définition La fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *fortement convexe* (de paramètre $m > 0$) sur U si

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x)+tf(y)-\tfrac{1}{2}mt(1-t)|x-y|^2 \quad \forall x, y \in U.$$

norme euclidienne

ces trois propriétés sont successivement plus forte

Définition La fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *fortement convexe* (de paramètre $m > 0$) sur U si

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x)+tf(y)-\tfrac{1}{2}mt(1-t)|x-y|^2 \quad \forall x, y \in U.$$

Théorème Soit U un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$ dans lequel f est de classe C^2. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) f est fortement convexe (de paramètre $m > 0$) sur U ;

(b) $f(y) - f(x) \geq \nabla f(x) \bullet (y-x) + \frac{m}{2}|y-x|^2, \quad x, y \in U$;

(c) $\nabla^2 f(x) \geq mI\,, x \in U$.

Ceci veut dire que la matrice $\nabla^2 f(x) - mI$ est sdp, ce qui équivaut à : toute valeur propre λ de $\nabla^2 f(x)$ satisfait $\lambda \geq m$.

Une fonction fortement convexe sur $\mathbf{R}^n$ est coercive

Théorème Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui est fortement convexe (de paramètre $m > 0$). Alors f est coercive de degré deux : il existe une constante c telle que

$$f(y) \geq c + \frac{m}{2}|y|^2, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

norme euclidienne

Théorème Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui est fortement convexe (de paramètre $m > 0$). Alors f est coercive de degré deux : il existe une constante c telle que

$$f(y) \geq c + \frac{m}{2}|y|^2, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration On invoque

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x) \bullet (y - x) + \frac{m}{2}|y - x|^2$$

afin d'écrire

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(0) + \nabla f(0) \bullet y + \frac{m}{2}|y|^2 \\ &\geq f(0) - |\nabla f(0)||y| + \frac{m}{2}|y|^2. \end{aligned}$$

Il suit que f est coercive et admet un minimum x_*. On refait ensuite le calcul ci-dessus avec x_* à la place de 0. En notant que $\nabla f(x_*) = 0$, on trouve le résultat. $\square$

Corollaire f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, la solution x_* de $\min\limits_{\mathbb{R}^n} f$ étant unique.

Exemple

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

On trouve

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Alors

$$\nabla^2 f - \tfrac{1}{2}I = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ce qui est une matrice définie positive (teste trace/déterminant).

Donc f est fortement convexe (de paramètre $m = 1/2$), et par conséquent coercive. (On aurait pu prendre m plus grand.)

l'optimisation numérique

Optimisation numérique sur la droite

Il s'agit de minimiser une fonction strictement convexe f sur l'intervalle $[x_1, x_5]$.

On suppose que l'on ne sait que faire une chose: évaluer f en un point précis.

Les évaluations de f sont le coût de l'opération.

On décrit la méthode de dichotomie.

On construit les points x_2, x_3, et x_4, et on évalue la fonction aux 5 points.

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

Le but est de réduire la longueur de l'intervalle sous considération (selon la configuration des valeurs calculées)

De cette façon on arrivera à situer le minimum x_* à la tolérance voulue.

Un premier cas : Les valeurs sont croissantes

$\Longrightarrow$ le min est entre x_1 et x_2

Preuve: Soit $z > x_2$. Il existe $t \in]0, 1[$ tel que $(1-t)x_1 + tz = x_2$. Alors

On pose $y_1 = x_1$ et $y_5 = x_2$.

Le nouvel intervalle de minimisation est $[y_1, y_5]$.

Sa longueur a été réduite par un facteur de 4.

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

x_1 x_2 z

y_1 y_5

de même:

Les valeurs sont décroissantes

$\Longrightarrow$ le min est entre x_4 et x_5

On pose $y_1 = x_1$ et $y_5 = x_2$.

Le nouvel intervalle de minimisation est $[y_1, y_5]$.

Sa longueur a été réduite par un facteur de 4.

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

y_1 y_5

Un cas différent :

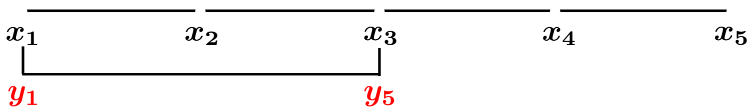
La valeur x_2 est la moindre des cinq

$\Longrightarrow$ le min est entre x_1 et x_3

On pose $y_1 = x_1$ et $y_5 = x_3$.

Le nouvel intervalle de minimisation est $[y_1 , y_5]$.

Sa longueur a été réduite par un facteur de 2.



de même :

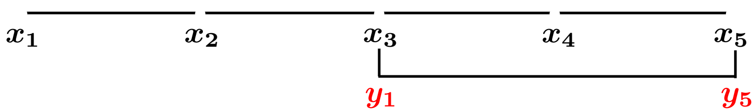
La valeur x_4 est la moindre des cinq

$\Longrightarrow$ le min est entre x_3 et x_5

On pose $y_1 = x_3$ et $y_5 = x_5$.

Le nouvel intervalle de minimisation est $[y_1 , y_5]$.

Sa longueur a été réduite par un facteur de 2.



dernier cas :

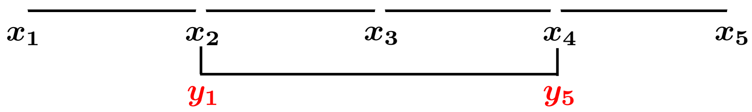
La valeur x_3 est la moindre des cinq

$\Longrightarrow$ le min est entre x_2 et x_4

On pose $y_1 = x_2$ et $y_5 = x_4$.

Le nouvel intervalle de minimisation est $[y_1 , y_5]$.

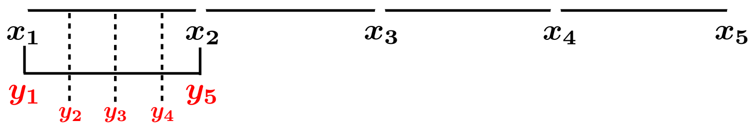
Sa longueur a été réduite par un facteur de 2.



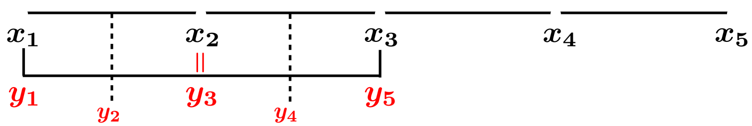
Ayant déterminer le nouvel intervalle $[y_1 , y_5]$, on construit les points y_2, y_3, et y_4.

Et on recommence. . .

Il faudra évaluer f en y_2, y_3, et y_4 si le facteur de réduction est 4.



Il faudra évaluer f en y_2 et y_4 si le facteur de réduction est de 2.



Dans tous les cas, après n évaluations de f, on aura diminué la longueur de l'intervalle sous-jacent par un facteur de $2^{(n-3)/2}$, au moins.

Les intervalles successifs étant emboîtés et de diamètre tendant vers 0, ils convergent vers $\{x_*\}$.

Exemple

```
f[x_]:=(x - 1)^2;  (* simple fonction quadratique *)
a =0; b =3;  dicho[f,a,b,35]
```

```
Nouvel intervalle  [ 0.     ,  1.5 ]
Nouvel intervalle  [ 0.75   ,  1.5 ]
Nouvel intervalle  [ 0.75   ,  1.125 ]
Nouvel intervalle  [ 0.9375  ,  1.125 ]
Nouvel intervalle  [ 0.9375  ,  1.031 ]
Nouvel intervalle  [ 0.9844  ,  1.031 ]
Nouvel intervalle  [ 0.9844  ,  1.008 ]
Nouvel intervalle  [ 0.9961  ,  1.008 ]
Nouvel intervalle  [ 0.9961  ,  1.002 ]
Nouvel intervalle  [ 0.999   ,  1.002 ]
Nouvel intervalle  [ 0.999   ,  1. ]
Nouvel intervalle  [ 0.9998  ,  1. ]
Nouvel intervalle  [ 0.9998  ,  1. ]
Nouvel intervalle  [ 0.9999  ,  1. ]
Nouvel intervalle  [ 0.9999  ,  1. ]
Nouvel intervalle  [ 1.    ,  1. ]
1.00001  <==  solution approximative
```

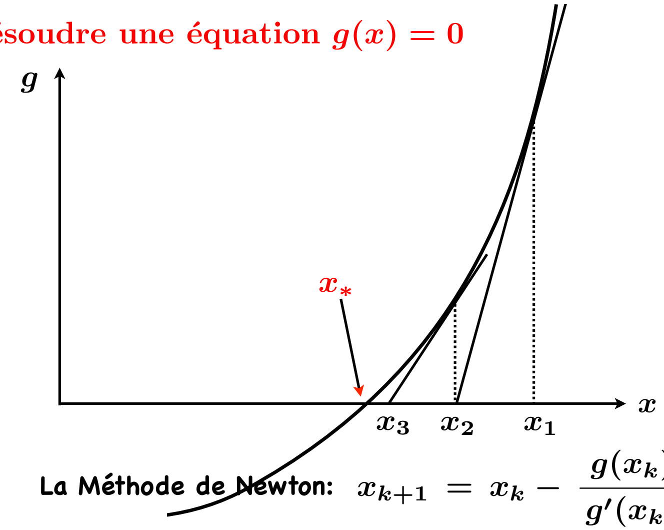
Exemple

$$\min_{x \in [0,3]} (x-1)^2$$

Il existe des algorithmes du même style très astucieux qui font (un peu) mieux... comme celui de la section dorée...

Une méthode qui utilise les dérivées de f

Résoudre une équation $g(x) = 0$



La Méthode de Newton: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)}$

Convergence *quadratique*
quand $g'(x_*) \neq 0$
et pour x_1 suffisamment proche:
$|x_{k+1} - x_*| \leq c|x_k - x_*|^2$

La Méthode de Newton: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)}$

On applique la méthode de Newton pour résoudre $g(x) = 0$, en prenant $g = f'$ (méthode de la sécante).

La solution x_* de $f' = 0$ sera le point qui minimise $f \ldots$ sous les bonnes hypothèses

Exemple

$$\min_{x \in [0,3]} (x-1)^2$$

$$f(x) = (x-1)^2$$
$$g(x) = f'(x) = 2(x-1)$$
$$g'(x) = f''(x) = 2$$

On prend $x_1 = \alpha \in [0,3]$

Alors

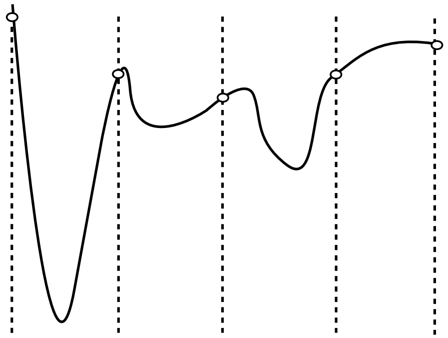
$$x_2 = \alpha - \frac{2(\alpha - 1)}{2} = 1$$

Convergence en une itération!

L'optimisation sur la droite n'est pas difficile,
en présence de convexité.

Et on peut faire mieux en utilisant les dérivées,
lorsqu'elles sont disponibles.

Le cas général non convexe n'est pas toujours facile, la réponse est à prendre avec un grain de sel



Optimisation numérique en plusieurs variables

L'optimisation sur la droite :
une seule direction (deux sens)

L'optimisation sur R^n :
un nombre infini de directions

L'idée centrale sera de trouver
une direction de descente

On regarde trois approches :

- méthode de relaxation $\longleftarrow f$ seulement
- méthode du gradient $\longleftarrow f$ et ∇f
- méthode de Newton $\longleftarrow f$, ∇f, et $\nabla^2 f$

méthode de relaxation

On se donne un point de départ $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$.

On va construire un nouveau point $u^1 = (u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1)$.

On minimise la fonction d'une seule variable

$$x \mapsto f(x, u_2^0, \dots, u_n^0) \implies \text{solution } u_1^1$$

On minimise la fonction d'une seule variable

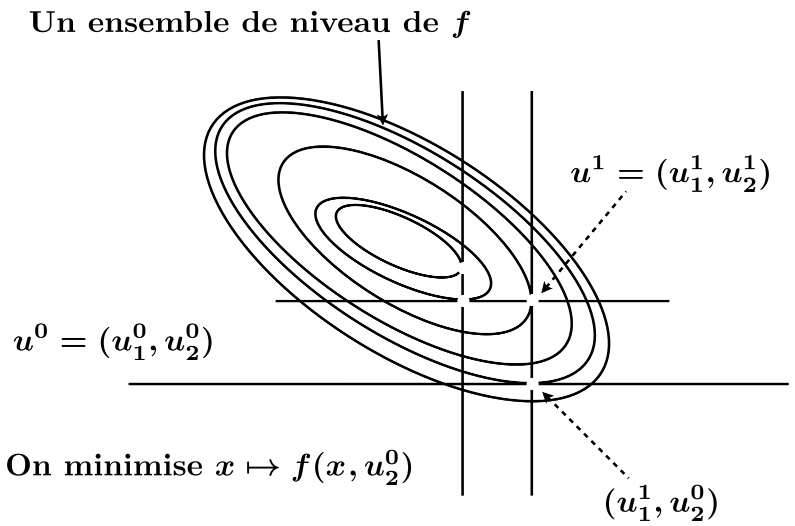
$$x \mapsto f(u_1^1, x, u_3^0, \dots, u_n^0) \implies \text{solution } u_2^1$$

$$\vdots$$

Après n minimisations, on a un nouveau point $u^1 = (u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1)$.

On recommence, avec u^1 comme nouveau point de départ.

On s'arrête lorsque $|\nabla f(u^k)|$ est inférieur à un seuil donné.



méthode du gradient

On se donne un point de départ $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$.

On va construire un nouveau point $u^1 = (u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1)$.

On minimise dans la direction de $-\nabla f(u^0)$. disponible

C-à-d, on minimise la fonction d'une seule variable

$$t \mapsto f(u^0 - t\nabla f(u^0)), \ t > 0 \implies \text{solution } t^0$$

Le prochain point est alors $u^1 := u^0 - t^0 \nabla f(u^0)$.

Ceci s'appelle aussi la méthode de *la plus grande pente* (*steepest descent*), et *au pas optimal*.

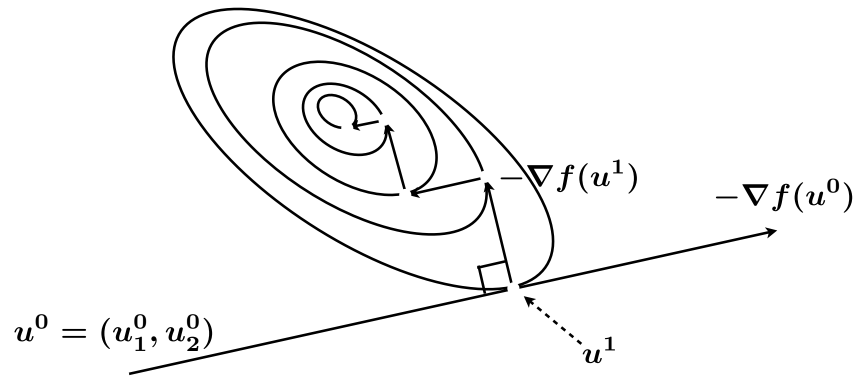
A l'étape k, connaissant u^k, on calcule u^{k+1} par

$$u^{k+1} := u^k - t^k \nabla f(u^k),$$

où t^k minimise sur les $t > 0$ la fonction

$$t \mapsto f(u^k - t\nabla f(u^k)).$$

On s'arrête lorsqu'un test de convergence est vérifié.



méthode de Newton

On se donne un point de départ $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$.

On va construire un nouveau point $u^1 = (u_1^1, u_2^1, \ldots, u_n^1)$.

On construit la fonction linéaire-quadratique

disponible

$$f^0(u) := $$
$$f(u^0) + \nabla f(u^0) \bullet (u - u^0) + \tfrac{1}{2} \nabla^2 f(u^0)(u - u^0) \bullet (u - u^0).$$

On minimise f^0 : solution u^1, où

$$u^1 := u^0 - \left[\nabla^2 f(u^0)\right]^{-1} \nabla f(u^0).$$

A l'étape k, connaissant u^k, on construit la fonction

$$f^k(u) :=$$
$$f(u^k) + \nabla f(u^k) \bullet (u - u^k) + \tfrac{1}{2} \nabla^2 f(u^k)(u - u^k) \bullet (u - u^k).$$

On minimise f^k : solution u^{k+1}, où

$$u^{k+1} := u^k - \left[\nabla^2 f(u^k)\right]^{-1} \nabla f(u^k).$$

On s'arrête lorsqu'un test de convergence est vérifié.

Si f est une belle fonction (C^2 et fortement convexe), on peut prouver que toutes ces méthodes convergent...

Autrement, on peut les déjouer. Ou du moins trouver des problèmes où elles ne sont pas très efficaces.

Moralité :

L'approche numérique est très efficace pour les problèmes convexes (et lisses).

Elle s'applique aussi aux problèmes non convexes, mais on peut aboutir à un point qui n'est que "stationnaire" (qui est peut-être un minimum local...)

Fin des diapos du troisième cours