Optimisation II

CM5

printemps 2017

cours de
Francis Clarke

clarke@math.univ-lyon1.fr

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; f(t,x(t),u(t)),\;\; t \in [a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t),\;\; t \in [a,b] \text{ p.p.} \\ & x(a) \;=\; x_0\,,\;\; x(b) \in E. \end{cases} \qquad \textbf{(OC)}$$

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(\tau,x,u) \;=\; \ell(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau \Lambda(x(t),u(t))\,dt \\ \text{s.l.c.} & \tau \;\geq\; 0 \\ & x'(t) \;=\; f(x(t),u(t)),\;\; t \in [0,\tau] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U,\;\; t \in [0,\tau] \text{ p.p.} \\ & x(0) \;=\; x_0\,,\;\; (\tau,x(\tau)) \in S. \end{cases} \qquad \textbf{(VT)}$$

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; f(t,x(t),u(t)),\;\; t \in [a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t),\;\; t \in [a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) \;=\; x_0\,,\;\; x(b) \in E. \end{cases}$$

$$H^\eta(t,x,p,u) \;=\; \langle p, f(t,x,u)\rangle - \eta\,\Lambda(t,x,u)$$

$$M^\eta(t,x,p) \;=\; \sup_{u \in U(t)} H^\eta(t,x,p,u).$$

Théorème (principe du maximum). Soit (x_*,u_*) un minimum local pour le problème (OC). Alors il existe une fonction absolument continue $p : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (le co-état) et un scalaire η égal à 0 ou 1 qui satisfont la non trivialité

$$(\eta, p(t)) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a,b],$$

la condition de transversalité

$$-p(b) \;\in\; \eta \nabla \ell(x_*(b)) + N_E(x_*(b)),$$

l'équation adjointe pour presque tout t :

$$-p'(t) \;=\; D_x H^\eta(t,x_*(t),p(t),u_*(t)),$$

ainsi que la condition du maximum pour presque tout t :

$$H^\eta(t,x_*(t),p(t),u_*(t)) \;=\; M^\eta(t,x_*(t),p(t)).$$

Si le problème est autonome (c-à-d, si f, Λ et U ne dépendent pas de t), on peut affirmer aussi la constance de l'hamiltonien : il existe $h \in \mathbb{R}$ tel que

$$H^\eta(x_*(t),p(t),u_*(t)) \;=\; M^\eta(x_*(t),p(t)) \;=\; h \text{ p.p.}$$

Illustrons par l'exo 15 (fiche 2)

Exer. 5.15 On considère le problème suivant :

$$\min\; \ell(x(2)) + \int_0^2 (2x - 3u)\,dt \;:\; x' = x + u,\, 0 \leq u \leq 2,\, x(0) = 5,\, x(2) \in E.$$

(a) Prouver que si (x,u) est solution, alors $u(t)$ est constante par morceaux, à valeur 0 ou 2, avec au plus un changement.

(b) On prend $\ell \equiv 0$ et $E = \mathbb{R}$. Prouver qu'une solution existe. Trouver explicitement le contrôle optimal $u(t)$.

(c) Expliquer (sans faire les calculs) comment trouver le contrôle optimal $u(t)$ quand $E = \{\bar{x}\}$.

Exer. 5.15 On considère le problème suivant :

$$\min\ \ell(x(2))+\int_0^2(2x-3u)\,dt \;:\; x'=x+u,\ 0\le u\le 2,\ x(0)=5,\ x(2)\in E.$$

(a) Prouver que si (x,u) est solution, alors $u(t)$ est constante par morceaux, à valeur 0 ou 2, avec au plus un changement.

(b) On prend $\ell\equiv 0$ et $E=\mathbb{R}$. Prouver qu'une solution existe. Trouver explicitement le contrôle optimal $u(t)$.

(c) Expliquer (sans faire les calculs) comment trouver le contrôle optimal $u(t)$ quand $E=\{\bar{x}\}$.

$n=m=1,\ \Lambda(x,u)=2x-3u,$

$f(x,u)=x+u,\ U=[0,2]$

$H(x,p,u)=p\bullet f-\eta\Lambda$

$\quad = p(x+u)-\eta(2x-3u)$

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minimiser} & J(x,u) &=& \ell(x(b))+\int_a^b\Lambda(t,x(t),u(t))\,dt\\ \text{slc} & x'(t)&=&f(t,x(t),u(t)),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.}\\ & u(t)&\in& U(t),\ \ t\in[a,b]\text{ p.p.}\\ & x(a)&=&x_0,\ \ x(b)\in E.\end{array}\right. \qquad \text{(OC)}$$

équation adjointe $-p'=H_x=p-2\eta$

cdn du max : $\max\limits_{0\le w\le 2}(p+3\eta)w$ atteint en $w=u(t)$

cas anormal ($\eta=0$) :

$p'=-p \implies p(t)=ce^{-t},\ c\neq 0$

$\implies p(t)>0$ pour tout t, d'où $u(t)=2\,\forall t$

ou bien

$p(t)<0$ pour tout t, d'où $u(t)=0\,\forall t$.

Exer. 5.15 On considère le problème suivant :

$$\min\ \ell(x(2))+\int_0^2(2x-3u)\,dt \;:\; x'=x+u,\ 0\le u\le 2,\ x(0)=5,\ x(2)\in E.$$

(a) Prouver que si (x,u) est solution, alors $u(t)$ est constante par morceaux, à valeur 0 ou 2, avec au plus un changement.

(b) On prend $\ell\equiv 0$ et $E=\mathbb{R}$. Prouver qu'une solution existe. Trouver explicitement le contrôle optimal $u(t)$.

(c) Expliquer (sans faire les calculs) comment trouver le contrôle optimal $u(t)$ quand $E=\{\bar{x}\}$.

$n=m=1,\ \Lambda(x,u)=2x-3u,$

$f(x,u)=x+u,\ U=[0,2]$

$H(x,p,u)=p\bullet f-\eta\Lambda$

$\quad = p(x+u)-\eta(2x-3u)$

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minimiser} & J(x,u) &=& \ell(x(b))+\int_a^b\Lambda(t,x(t),u(t))\,dt\\ \text{slc} & x'(t)&=&f(t,x(t),u(t)),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.}\\ & u(t)&\in& U(t),\ \ t\in[a,b]\text{ p.p.}\\ & x(a)&=&x_0,\ \ x(b)\in E.\end{array}\right. \qquad \text{(OC)}$$

équation adjointe $-p'=H_x=p-2\eta$

cdn du max : $\max\limits_{0\le w\le 2}(p+3\eta)w$ atteint en $w=u(t)$

On prend alors $\eta=1$, donc $-p'=p-2 \implies p(t)=ce^{2-t}+2$ et

$$u=\begin{cases}0 & 5+ce^{2-t}<0\\ 2 & 5+ce^{2-t}>0\end{cases}$$

d'où la conclusion (a)

Exer. 5.15 On considère le problème suivant :

$$\min\ \ell(x(2))+\int_0^2(2x-3u)\,dt \;:\; x'=x+u,\ 0\le u\le 2,\ x(0)=5,\ x(2)\in E.$$

(a) Prouver que si (x,u) est solution, alors $u(t)$ est constante par morceaux, à valeur 0 ou 2, avec au plus un changement.

(b) On prend $\ell\equiv 0$ et $E=\mathbb{R}$. Prouver qu'une solution existe. Trouver explicitement le contrôle optimal $u(t)$.

(c) Expliquer (sans faire les calculs) comment trouver le contrôle optimal $u(t)$ quand $E=\{\bar{x}\}$.

$n=m=1,\ \Lambda(x,u)=2x-3u,$

$f(x,u)=x+u,\ U=[0,2]$

$H(x,p,u)=p\bullet f-\eta\Lambda$

$\quad = p(x+u)-\eta(2x-3u)$

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minimiser} & J(x,u) &=& \ell(x(b))+\int_a^b\Lambda(t,x(t),u(t))\,dt\\ \text{slc} & x'(t)&=&f(t,x(t),u(t)),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.}\\ & u(t)&\in& U(t),\ \ t\in[a,b]\text{ p.p.}\\ & x(a)&=&x_0,\ \ x(b)\in E.\end{array}\right. \qquad \text{(OC)}$$

équation adjointe $-p'=H_x=p-2\eta$

cdn du max : $\max\limits_{0\le w\le 2}(p+3\eta)w$ atteint en $w=u(t)$

$-p(b)\in\eta\nabla\ell(x_*(b))+N_E(x_*(b))$

(b) : (Admettons l'existence.) Le cas $\eta=0$ est pareil, prenons $\eta=1$.

La transversalité donne $-p(2)\in N_{\mathbb{R}}(x(2)) \implies p(2)=0.$

d'où la réponse (b)

Il vient $p(t)=-2e^{2-t}+2$ et $u=\begin{cases}0 & 5-2e^{2-t}<0\\ 2 & 5-2e^{2-t}>0\end{cases}$

On change de $u=0$ en $u=2$ quand $t=2+\ln 2-\ln 5\in\,]0,2[$.

Rq : problème convexe !

Exer. 5.15 On considère le problème suivant :

$$\min\ \ell(x(2))+\int_0^2(2x-3u)\,dt \;:\; x'=x+u,\ 0\le u\le 2,\ x(0)=5,\ x(2)\in E.$$

(a) Prouver que si (x,u) est solution, alors $u(t)$ est constante par morceaux, à valeur 0 ou 2, avec au plus un changement.

(b) On prend $\ell\equiv 0$ et $E=\mathbb{R}$. Prouver qu'une solution existe. Trouver explicitement le contrôle optimal $u(t)$.

(c) Expliquer (sans faire les calculs) comment trouver le contrôle optimal $u(t)$ quand $E=\{\bar{x}\}$.

$n=m=1,\ \Lambda(x,u)=2x-3u,$

$f(x,u)=x+u,\ U=[0,2]$

$H(x,p,u)=p\bullet f-\eta\Lambda$

$\quad = p(x+u)-\eta(2x-3u)$

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minimiser} & J(x,u) &=& \ell(x(b))+\int_a^b\Lambda(t,x(t),u(t))\,dt\\ \text{slc} & x'(t)&=&f(t,x(t),u(t)),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.}\\ & u(t)&\in& U(t),\ \ t\in[a,b]\text{ p.p.}\\ & x(a)&=&x_0,\ \ x(b)\in E.\end{array}\right. \qquad \text{(OC)}$$

équation adjointe $-p'=H_x=p-2\eta$

cdn du max : $\max\limits_{0\le w\le 2}(p+3\eta)w$ atteint en $w=u(t)$

$-p(b)\in\eta\nabla\ell(x_*(b))+N_E(x_*(b))$

(c) : (prenons $\eta=1$) On a toujours $p(t)=ce^{2-t}+2$

et $u=\begin{cases}0 & 5+ce^{2-t}<0\\ 2 & 5+ce^{2-t}>0\end{cases}$

la transversalité ne donne aucune info

$u(t)$ change quand $t=\tau(c)$; on calcule ensuite $x(t)$ en fonction de $\tau(c)$; il faut $x(2)=\bar{x}$. C'est un *problème aux limites.*

problème isopérimétrique : règle du multiplicateur

Le *problème isopérimétrique* en calcul des variations est celui de minimiser la même fonctionnelle $J(x)$ que pour (P), et sous les mêmes contraintes au bord, mais sous deux contraintes supplémentaires:

$$\int_a^b G(t,x(t),x'(t))\,dt \le 0\,, \quad \int_a^b H(t,x(t),x'(t))\,dt = 0.$$

Théorème (règle du multiplicateur) Soit $x_* \in C^2[a,b]$ solution du problème isopérimétrique. Alors il existe un triplet $(\eta,\gamma,\lambda) \neq 0$ avec $\eta = 0$ ou 1 et $\gamma \ge 0$, tel que

$$\int_a^b G(t,x_*(t),{x_*}'(t))\,dt \; < 0 \implies \gamma = 0$$

et tel que x_* soit une extrémale du lagrangien $\eta L + \gamma G + \lambda H$.

comment mettre $\min \int_a^b L(t,x,x')\,dt \;:\, x(a) = A,\; x(b) = B$

$$\int_a^b G(t,x(t),x'(t))\,dt \le 0\,, \quad \int_a^b H(t,x(t),x'(t))\,dt = 0.$$

dans la forme

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minimiser} & J(x,u) & = & \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) & = & f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) & \in & U(t),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & x(a) & = & x_0\,,\quad x(b) \in E. \end{array}\right. \qquad \text{(OC)}$$

On va identifier x' avec u ; c-à-d, imposer $x' = u$, avec $U = \mathbb{R}$.

On introduit deux nouvelles composantes y et z de l'état (qui devient (x,y,z)), avec les dynamiques et conditions initiales suivantes :

$$y' = G(t,x,u), \quad z' = H(t,x,u), \quad y(a) = z(a) = 0. \qquad n = 3$$

On pose $f(x,y,z,u) = \begin{bmatrix} u \\ G(t,x,u) \\ H(t,x,u) \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et

$\ell = 0$, $\Lambda = L$, $E = \{B\}\times\,]-\infty,0]\times\{0\}$.

La solution de (OC) :

$$\left(x(t), \int_a^t G(s,x(s),x'(s))\,ds, \int_a^t H(s,x(s),x'(s))\,ds\right)$$

comment mettre $\min \int_a^b L(t,x,x')\,dt \;:\, x(a) = A,\; x(b) = B$

$$\int_a^b G(t,x(t),x'(t))\,dt \le 0\,, \quad \int_a^b H(t,x(t),x'(t))\,dt = 0.$$

dans la forme

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minimiser} & J(x,u) & = & \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) & = & f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) & \in & U(t),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & x(a) & = & x_0\,,\quad x(b) \in E. \end{array}\right. \qquad \text{(OC)}$$

On va identifier x' avec u ; c-à-d, imposer $x' = u$, avec $U = \mathbb{R}$.

On introduit deux nouvelles composantes y et z de l'état (qui devient (x,y,z)), avec les dynamiques et conditions initiales suivantes :

$$y' = G(t,x,u), \quad z' = H(t,x,u), \quad y(a) = z(a) = 0.$$

On pose $f(x,y,z,u) = \begin{bmatrix} u \\ G(t,x,u) \\ H(t,x,u) \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et

$\ell = 0$, $\Lambda = L$, $E = \{B\}\times\,]-\infty,0]\times\{0\}$.

$H(t,x,y,z,p,q,r,u) =$ (cas normal)

$pu + qG(t,x,u) + rH(t,x,u) - L(t,x,u)$ $\quad H(t,x,p,u) = \langle p, f(t,x,u)\rangle - \Lambda(t,x,u)$

PMP $\implies$ $-q' = H_y$, $-r' = H_z$ $\implies$ q, r const

comment mettre $\min \int_a^b L(t,x,x')\,dt \;:\, x(a) = A,\; x(b) = B$

$$\int_a^b G(t,x(t),x'(t))\,dt \le 0\,, \quad \int_a^b H(t,x(t),x'(t))\,dt = 0.$$

dans la forme

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minimiser} & J(x,u) & = & \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) & = & f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) & \in & U(t),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & x(a) & = & x_0\,,\quad x(b) \in E. \end{array}\right. \qquad \text{(OC)}$$

On va identifier x' avec u ; c-à-d, imposer $x' = u$, avec $U = \mathbb{R}$.

On introduit deux nouvelles composantes y et z de l'état (qui devient (x,y,z)), avec les dynamiques et conditions initiales suivantes :

$$y' = G(t,x,u), \quad z' = H(t,x,u), \quad y(a) = z(a) = 0.$$

On pose $f(x,y,z,u) = \begin{bmatrix} u \\ G(t,x,u) \\ H(t,x,u) \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et

$\ell = 0$, $\Lambda = L$, $E = \{B\}\times\,]-\infty,0]\times\{0\}$.

transversalité $\implies$ $-q(b) \in N_{]-\infty,0]}(y(b)) \implies q \le 0$
(= 0 si non saturée)

comment mettre $\min \int_a^b L(t,x,x')\,dt \ : x(a)=A,\ x(b)=B$

$$\int_a^b G(t,x(t),x'(t))\,dt \le 0\,, \quad \int_a^b H(t,x(t),x'(t))\,dt = 0.$$

dans la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; f(t,x(t),u(t)),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t)\in U(t),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) \;=\; x_0\,,\ \ x(b)\in E. \end{cases}$$

On va identifier x' avec u ; c-à-d, imposer $x'=u$, avec $U=\mathbb{R}$.

On introduit deux nouvelles composantes y et z de l'état (qui devient (x,y,z)), avec les dynamiques et conditions initiales suivantes :

$$y' = G(t,x,u), \quad z' = H(t,x,u), \quad y(a)=z(a)=0.$$

On pose $f(x,y,z,u) = \begin{bmatrix} u \\ G(t,x,u) \\ H(t,x,u) \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et

$\ell=0,\ \Lambda=L,\ E=\{B\}\times\,]-\infty,0]\times\{0\}$.

L'éqn adjointe pour p et la cdn du max $\Longrightarrow$
l'éqn d'Euler pour $L-qG-rH$

comment mettre $\min \int_a^b L(t,x,x')\,dt \ : x(a)=A,\ x(b)=B$

$$\int_a^b G(t,x(t),x'(t))\,dt \le 0\,, \quad \int_a^b H(t,x(t),x'(t))\,dt = 0.$$

dans la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; f(t,x(t),u(t)),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t)\in U(t),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) \;=\; x_0\,,\ \ x(b)\in E. \end{cases}$$

On va identifier x' avec u ; c-à-d, imposer $x'=u$, avec $U=\mathbb{R}$.

On introduit deux nouvelles composantes y et z de l'état (qui devient (x,y,z)), avec les dynamiques et conditions initiales suivantes :

$$y' = G(t,x,u), \quad z' = H(t,x,u), \quad y(a)=z(a)=0.$$

On pose $f(x,y,z,u) = \begin{bmatrix} u \\ G(t,x,u) \\ H(t,x,u) \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et

$\ell=0,\ \Lambda=L,\ E=\{B\}\times\,]-\infty,0]\times\{0\}$.

On obtient la règle du multiplicateur en prenant
$\gamma=-q$ et $\lambda=-r$

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; f(t,x(t),u(t)),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t)\in U(t),\ \ t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) \;=\; x_0\,,\ \ x(b)\in E. \end{cases}$$

$$H^\eta(t,x,p,u) \;=\; \langle p, f(t,x,u)\rangle - \eta\,\Lambda(t,x,u)$$

$$M^\eta(t,x,p) \;=\; \sup_{u\,\in\,U(t)} H^\eta(t,x,p,u).$$

Théorème (principe du maximum). Soit (x_*,u_*) un minimum local pour le problème (OC). Alors il existe une fonction absolument continue $p:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ (le co-état) et un scalaire η égal à 0 ou 1 qui satisfont la non trivialité

$$(\eta, p(t)) \;\neq\; 0 \quad \forall\, t\in[a,b],$$

la condition de transversalité

$$-p(b) \;\in\; \eta\nabla\ell(x_*(b)) + N_E(x_*(b)),$$

l'équation adjointe pour presque tout t :

$$-p'(t) \;=\; D_x\, H^\eta(t,x_*(t),p(t),u_*(t)),$$

ainsi que la condition du maximum pour presque tout t :

$$H^\eta(t,x_*(t),p(t),u_*(t)) \;=\; M^\eta(t,x_*(t),p(t)).$$

Si le problème est autonome (c-à-d, si f, Λ et U ne dépendent pas de t), on peut affirmer aussi la constance de l'hamiltonien : il existe $h\in\mathbb{R}$ tel que

$$H^\eta(x_*(t),p(t),u_*(t)) \;=\; M^\eta(x_*(t),p(t)) \;=\; h \text{ p.p.}$$

Exemple
On vous demande de résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \int_0^1 \left(\tfrac12 x^2(t) - |u(t)|\right)dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; u(t)\in[-1,1] \text{ p.p.} \\ & x(0) \;=\; 0. \end{cases}$$

Soit (x,u) solution. Le PMP tient en forme normale ($\eta=1$), car $x(1)$ est libre ($E=\mathbb{R}$).

Rq : On peut supposer que $x(t)\ge 0$: si sur un intervalle $[c,d]$ on a $x\le 0$ avec $x(c)=x(d)=0$, il suffit de remplacer sur cet intervalle x par $-x$ et u par $-u$; ceci ne change pas le coût. L'autre cas est celui où $x\le 0$ sur un intervalle $[c,1]$, avec $x(c)=0$; à nouveau, on remplace x par $-x$ et u par $-u$ sans changer le coût.

Le PMP donne $p(1)=0$ et

$$p'(t) \;=\; x(t)\ge 0\,,\quad u(t) \;=\; \operatorname{sgn} p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t)>0 \\ -1 & \text{si } p(t)<0 \end{cases}$$

Donc le co-état $p(t)$ est croissant et négatif.

Ici, on a $E=\mathbb{R}$ et la transversalité devient

$-p(1)\in N_E(x(1))=\{0\}$

Exemple

On vous demande de résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) = \int_0^1 \left(\tfrac12 x^2(t) - |u(t)|\right) dt \\ \text{slc} & x'(t) = u(t) \in [-1,1] \text{ p.p.} \\ & x(0) = 0. \end{cases}$$

Soit (x,u) solution. Le PMP tient en forme normale ($\eta = 1$), car $x(1)$ est libre ($E = \mathbb{R}$).

Rq : On peut supposer que $x(t) \geq 0$: si sur un intervalle $[c,d]$ on a $x \leq 0$ avec $x(c) = x(d) = 0$, il suffit de remplacer sur cet intervalle x par $-x$ et u par $-u$; ceci ne change pas le coût. L'autre cas est celui où $x \leq 0$ sur un intervalle $[c,1]$, avec $x(c) = 0$; à nouveau, on remplace x par $-x$ et u par $-u$ sans changer le coût.

Le PMP donne $p(1) = 0$ et

On a $H(x,p,u) = pu - \frac12 x^2(t) + |u(t)|$

$$p'(t) = x(t) \geq 0\,,\quad u(t) = \operatorname{sgn} p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) > 0 \\ -1 & \text{si } p(t) < 0 \end{cases}$$

Donc le co-état $p(t)$ est croissant et négatif.

$H(t,x,p,u) = \langle p, f(t,x,u)\rangle - \Lambda(t,x,u)$

$M(t,x,p) = \sup_{u \in U(t)} H(t,x,p,u)$

Exemple

On vous demande de résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) = \int_0^1 \left(\tfrac12 x^2(t) - |u(t)|\right) dt \\ \text{slc} & x'(t) = u(t) \in [-1,1] \text{ p.p.} \\ & x(0) = 0. \end{cases}$$

Soit (x,u) solution. Le PMP tient en forme normale ($\eta = 1$), car $x(1)$ est libre ($E = \mathbb{R}$).

Rq : On peut supposer que $x(t) \geq 0$: si sur un intervalle $[c,d]$ on a $x \leq 0$ avec $x(c) = x(d) = 0$, il suffit de remplacer sur cet intervalle x par $-x$ et u par $-u$; ceci ne change pas le coût. L'autre cas est celui où $x \leq 0$ sur un intervalle $[c,1]$, avec $x(c) = 0$; à nouveau, on remplace x par $-x$ et u par $-u$ sans changer le coût.

Le PMP donne $p(1) = 0$ et

On a $H(x,p,u) = pu - \frac12 x^2(t) + |u(t)|$

$$p'(t) = x(t) \geq 0\,,\quad u(t) = \operatorname{sgn} p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) > 0 \\ -1 & \text{si } p(t) < 0 \end{cases}$$

Donc le co-état $p(t)$ est croissant et négatif.

C'est l'équation adjointe $-p = H_x$

Exemple

On vous demande de résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) = \int_0^1 \left(\tfrac12 x^2(t) - |u(t)|\right) dt \\ \text{slc} & x'(t) = u(t) \in [-1,1] \text{ p.p.} \\ & x(0) = 0. \end{cases}$$

Soit (x,u) solution. Le PMP tient en forme normale ($\eta = 1$), car $x(1)$ est libre ($E = \mathbb{R}$).

Rq : On peut supposer que $x(t) \geq 0$: si sur un intervalle $[c,d]$ on a $x \leq 0$ avec $x(c) = x(d) = 0$, il suffit de remplacer sur cet intervalle x par $-x$ et u par $-u$; ceci ne change pas le coût. L'autre cas est celui où $x \leq 0$ sur un intervalle $[c,1]$, avec $x(c) = 0$; à nouveau, on remplace x par $-x$ et u par $-u$ sans changer le coût.

Le PMP donne $p(1) = 0$ et

On a $H(x,p,u) = pu - \frac12 x^2(t) + |u(t)|$

$$p'(t) = x(t) \geq 0\,,\quad u(t) = \operatorname{sgn} p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) > 0 \\ -1 & \text{si } p(t) < 0 \end{cases}$$

Donc le co-état $p(t)$ est croissant et négatif.

$\max_{-1 \leq w \leq 1} pw + |w|$ est atteint en

$$w = \begin{cases} 1 & \text{si } p > 0 \\ -1 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Exemple

On vous demande de résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) = \int_0^1 \left(\tfrac12 x^2(t) - |u(t)|\right) dt \\ \text{slc} & x'(t) = u(t) \in [-1,1] \text{ p.p.} \\ & x(0) = 0. \end{cases}$$

Soit (x,u) solution. Le PMP tient en forme normale ($\eta = 1$), car $x(1)$ est libre ($E = \mathbb{R}$).

Rq : On peut supposer que $x(t) \geq 0$: si sur un intervalle $[c,d]$ on a $x \leq 0$ avec $x(c) = x(d) = 0$, il suffit de remplacer sur cet intervalle x par $-x$ et u par $-u$; ceci ne change pas le coût. L'autre cas est celui où $x \leq 0$ sur un intervalle $[c,1]$, avec $x(c) = 0$; à nouveau, on remplace x par $-x$ et u par $-u$ sans changer le coût.

Le PMP donne $p(1) = 0$ et

On a $H(x,p,u) = pu - \frac12 x^2(t) + |u(t)|$

$$p'(t) = x(t) \geq 0\,,\quad u(t) = \operatorname{sgn} p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) > 0 \\ -1 & \text{si } p(t) < 0 \end{cases}$$

Donc le co-état $p(t)$ est croissant et négatif.

Mais c'est faux !

$x = p = 0$

$+$ cdn du max

$\Longrightarrow \ |u| = 1$

Soit τ le premier point dans $[0,1]$ où $p(\tau) = 0$. On mq $\tau = 0$.

Si $\tau > 0$, alors $p(t) < 0$ sur $[0,\tau)$, d'où $u(t) = -1$ sur cet intervalle. Mais ceci implique que x devient strictement négatif, contradiction. On a donc $\tau = 0$; c-à-d, p est identiquement zéro. On en déduit $x \equiv p' \equiv 0 \equiv u$, et le coût optimal vaut 0.

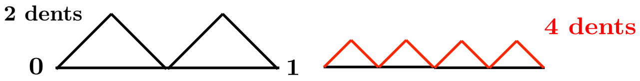
Exemple

On vous demande de résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) = \displaystyle\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2(t) - |u(t)| \right) dt \\ \text{slc} & x'(t) = u(t) \in [-1,1] \text{ p.p.} \\ & x(0) = 0. \end{cases}$$

Observation.

Soit (x_n) une suite de fonctions sur $[0,1]$ en 2^n dents de scie, ayant ${x_n}'(t) = u_n(t) = \pm 1$ p.p.



Les x_n converge uniformément vers 0, et le coût correspondant à ces couples (x_n, u_n) tend vers -1 (nettement mieux que 0).

La solution est fausse : on a appliqué (correctement) un raisonnement déductif, mais en ignorant la question d'existence.

Ici, le inf n'est pas atteint

un théorème d'existence pour (OC)

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) = \ell(x(b)) + \displaystyle\int_a^b \Lambda(t, x(t), u(t))\, dt \\ \text{slc} & x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in [a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) = x_0, \quad x(b) \in E. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) = \ell(x(b)) + \displaystyle\int_a^b \Lambda(t, x(t), u(t))\, dt \\ \text{slc} & x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t), \quad t \in [a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) = x_0, \quad x(b) \in E. \end{cases}$$

Théorème. On considère le problème (OC) sous les hypothèses suivantes :

(1) $f(t,x,u)$ est de la forme $g_0(t,x) + g(t,x) \bullet u$ pour certaines fonctions g_0, g qui sont continues et bornées linéairement :

$$|g_0(t,x)| + |g(t,x)| \leq k(|x|+1)\ \forall\, x\,;$$

(2) ℓ et Λ sont continues, et $\Lambda(t,x,u)$ est convexe par rapport à la variable u ;

(3) E est fermé ;

(4) Pour un certain ensemble compact et convexe U_0, on a $U(t) = U_0$ pour tout t.

Alors, si l'ensemble des couples (x,u) admissibles pour (OC) est non vide, il existe une solution du problème.

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, \ x(b) = B.$$

Le preuve utilise une suite minimisante (x_i), la convergence faible des (x_i'), et la semi-continuité de l'application

rappel

$$(x,v) \mapsto \int_a^b L(t, x(t), v(t))\, dt.$$

Tonelli

Théorème. On suppose que le lagrangien $L(t,x,v)$ est convexe par rapport à v et satisfait, pour des constantes $\alpha > 0, p > 1, \gamma \geq 0$ et β, la condition de coercivité suivante :

$$L(t,x,v) \geq \alpha |v|^p - \gamma\, |x| + \beta \quad \forall\, (t,x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Alors le problème (P) admet une solution $x_* \in \mathrm{AC}[a,b]$.

Lorsque L satisfait en outre certaines hypothèses supplémentaires, on montre que x_* est lipschitzienne, voire lisse.

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & J(x,u) & = \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) & = f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t), & t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) & = x_0\,,\quad x(b)\in E. \end{array}\right.$$

Théorème. On considère le problème (OC) sous les hypothèses suivantes :

(1) $f(t,x,u)$ est de la forme $g_0(t,x)+g(t,x)\bullet u$ pour certaines fonctions g_0, g qui sont continues et bornées linéairement :

$$|g_0(t,x)| + |g(t,x)| \le k(|x|+1)\ \forall\, x\,;$$

(2) ℓ et Λ sont continues, et $\Lambda(t,x,u)$ est convexe par rapport à la variable u ;

(3) E est fermé ;

(4) Pour un certain ensemble compact et convexe U_0, on a $U(t)=U_0$ pour tout t.

Alors, si l'ensemble des couples (x,u) admissibles pour (OC) est non vide, il existe une solution du problème.

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & J(x,u) & = \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) & = f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t), & t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) & = x_0\,,\quad x(b)\in E. \end{array}\right.$$

Preuve : Il existe une suite minimisante (x_i, u_i).

On extrait une sous-suite tq u_i converge faiblement vers u_* (un contrôle admissible) et x_i uniformément vers x_* (qui satisfait les conditions au bord).

L'équation différentielle de l'état reste vraie à la limite, pour le couple (x_*, u_*).

Et le coût $J(x,u)$ est semi-continu par rapport à ces convergences.

Il suit que le couple (x_*, u_*) est solution de (OC).

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & J(x,u) & = \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) & = f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t), & t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) & = x_0\,,\quad x(b)\in E. \end{array}\right.$$

Existence ?

Théorème. On considère le problème (OC) sous les hypothèses suivantes :

(1) $f(t,x,u)$ est de la forme $g_0(t,x)+g(t,x)\bullet u$ pour certaines fonctions g_0, g qui sont continues et bornées linéairement :

$$|g_0(t,x)| + |g(t,x)| \le k(|x|+1)\ \forall\, x\,;$$

(2) ℓ et Λ sont continues, et $\Lambda(t,x,u)$ est convexe par rapport à la variable u ;

(3) E est fermé ;

(4) Pour un certain ensemble compact et convexe U_0, on a $U(t)=U_0$ pour tout t.

Alors, si l'ensemble des couples (x,u) admissibles pour (OC) est non vide, il existe une solution du problème.

Exemple
On vous demande de résoudre

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & J(x,u) & = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2(t) - |u(t)| \right) dt \\ \text{slc} & x'(t) & = u(t) \in [-1,1] \text{ p.p.} \\ & x(0) & = 0. \end{array}\right.$$

Le théorème d'existence ne s'applique pas :

$\Lambda(t,x,u)$ n'est pas convexe par rapport à la variable u.

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & J(x,u) & = \ell(x(b)) + \int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) & = f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t) \in U(t), & t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) & = x_0\,,\quad x(b)\in E. \end{array}\right.$$

Existence ?

Théorème. On considère le problème (OC) sous les hypothèses suivantes :

(1) $f(t,x,u)$ est de la forme $g_0(t,x)+g(t,x)\bullet u$ pour certaines fonctions g_0, g qui sont continues et bornées linéairement :

$$|g_0(t,x)| + |g(t,x)| \le k(|x|+1)\ \forall\, x\,;$$

(2) ℓ et Λ sont continues, et $\Lambda(t,x,u)$ est convexe par rapport à la variable u ;

(3) E est fermé ;

(4) Pour un certain ensemble compact et convexe U_0, on a $U(t)=U_0$ pour tout t.

Alors, si l'ensemble des couples (x,u) admissibles pour (OC) est non vide, il existe une solution du problème.

L'exo 15 dont on a parlé en début de cours :

Exer. 5.15 On considère le problème suivant :

$$\min\ \ell(x(2)) + \int_0^2 (2x-3u)\,dt \,:\, x' = x+u,\ 0\le u\le 2,\ x(0)=5,\ x(2)\in E.$$

(a) Prouver que si (x,u) est solution, alors $u(t)$ est constante par morceaux, à valeur 0 ou 2, avec au plus un changement.

(b) On prend $\ell\equiv 0$ et $E=\mathbb{R}$. Prouver qu'une solution existe. Trouver explicitement le contrôle optimal $u(t)$.

(c) Expliquer (sans faire les calculs) comment trouver le contrôle optimal $u(t)$ quand $E=\{\bar{x}\}$.

Le théorème d'existence s'applique

$$
\boxed{\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \ell(x(b)) + \displaystyle\int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; f(t,x(t),u(t)), \;\; t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t)\in U(t), \;\; t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) \;=\; x_0\,, \;\; x(b)\in E. \end{cases}}
$$

Existence ?

Théorème. On considère le problème (OC) sous les hypothèses suivantes :

(1) $f(t,x,u)$ est de la forme $g_0(t,x)+g(t,x)\bullet u$ pour certaines fonctions g_0, g qui sont continues et bornées linéairement :

$$|g_0(t,x)|+|g(t,x)| \le k(|x|+1)\,\forall\, x\,;$$

(2) ℓ et Λ sont continues, et $\Lambda(t,x,u)$ est convexe par rapport à la variable u ;

(3) E est fermé ;

(4) Pour un certain ensemble compact et convexe U_0, on a $U(t)=U_0$ pour tout t.

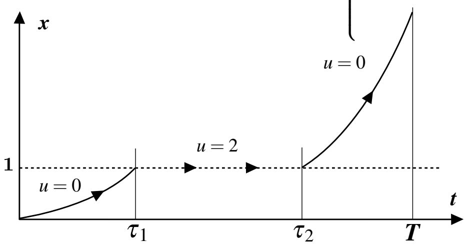
Alors, si l'ensemble des couples (x,u) admissibles pour (OC) est non vide, il existe une solution du problème.

Le théorème d'existence s'applique

un exemple de la semaine dernière

$$
\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \displaystyle\int_0^T \{x(t)+u(t)\}\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; x(t)+1-x(t)\,u(t), \;\; t\in[0,T] \text{ p.p.} \\ & u(t)\in U \;=\; [0,3], \;\; t\in[0,T] \text{ p.p.} \\ & x(0) \;=\; 0. \end{cases}
$$

problème non convexe



Une solution existe ; le PMP identifie un unique candidat ; celui-ci est la solution (méthode déductive)

Que faire lorsque la méthode déductive ne s'applique pas ?

On a vu le rôle que joue la convexité lorsque celle-ci est présente.

Il existe une autre grande méthode inductive :
les fonctions vérificatrices

La méthode des fonctions vérificatrices en contrôle optimal (FC section 24.2)

$$
\boxed{\begin{cases} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \ell(x(b)) + \displaystyle\int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; f(t,x(t),u(t)), \;\; t\in[a,b] \text{ p.p.} \\ & u(t)\in U(t), \;\; t\in[a,b] \text{ p.p.} \qquad \text{(OC)} \\ & x(a) \;=\; x_0\,, \;\; x(b)\in E. \end{cases}}
$$

La méthode se base sur une fonction φ qui satisfait l'inégalité Hamilton-Jacobi :

$$\Lambda(t,x,u)+\varphi_t(t,x)+\langle \varphi_x(t,x), f(t,x,u)\rangle \ge 0, (t,x,u)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times U(t)$$

ainsi que la condition suivante à la frontière :

$$\varphi(b,y) \;=\; \ell(y), \quad y\in E\,.$$

On note la présence de la fonction f dans l'inégalité.

Soit (x,u) admissible. On pose $(t,x,u)=(t,x(t),u(t))$ dans l'inégalité, et on remplace $f(t,x(t),u(t))$ par $x'(t)$ p.p. On intègre ensuite des deux côtés pour obtenir

$$\int_a^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \;\ge\; \int_a^b -\frac{d}{dt}\,\varphi(t,x(t))\,dt$$
$$= \varphi(a,x(a))-\varphi(b,x(b)) \;=\; \varphi(a,x_0)-\ell(x(b))\,,$$

d'où $J(x,u)\ge\varphi(a,x_0)$. On a trouvé une borne inférieure pour le coût associé à n'importe lequel (x,u) admissible.

Si, pour un certain couple admissible (x_*,u_*), l'inégalité est une égalité p.p., il suit que le couple est solution de (OC), puisque la borne inférieure est atteinte.

Question. Une fonction vérificatrice existe-t-elle toujours ? Comment la trouver ?

La *fonction valeur* $V(\tau,\alpha)$ suivante est très pertinente :

$$V(\tau,\alpha) \;=\; \min\; \ell(x(b))+\int_\tau^b \Lambda(t,x(t),u(t))\,dt \;:\; x(\tau)=\alpha\,,\; x(b)\in E,$$

où, comme avant, on a $x'=f(t,x,u)$ et $u(t)\in U(t)$ presque partout.

On note $\mathrm{P}(\tau,\alpha)$ le problème qui figure ci-dessus. Donc (τ,α) est le paramètre dans une famille de problèmes. Le problème initiale (OC) correspond au choix $\tau=a$, $\alpha=x_0$.

La fonction V sera une fonction vérificatrice.

Mais elle ne sera pas forcément dérivable. . .

On considère le problème suivant :

Exemple (FC 24.6)

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \displaystyle\int_0^\infty e^{-2t}u(t)(1-x(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; x(t)(4-x(t)) - x(t)\,u(t)\,, \quad t \geqslant 0 \text{ p.p.} \\ & u(t) \;\in\; [0,4]\,, \quad t \geqslant 0 \text{ p.p.} \\ & x(0) \;=\; x_0\,. \end{array}\right.$$

normal ?
convexe ?
horizon infini !
linéaire en u

On suppose $0 < x_0 < 4$.

Méthode déductive : difficile (ni le théorème d'existence ni les conditions nécessaires s'appliquent). On procède quand-même !

$$H(t,x,p,u) \;=\; p\,\{x(4-x) - ux\} - e^{-2t}u(1-x).$$

On identifie le coéfficient de u (switching function) :

$$\sigma \;=\; e^{-2t}(x-1) - px\,.$$

Le co-état p satisfait

$$-p' \;=\; p(4-2x-u) + ue^{-2t}, \quad u(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma < 0 \\ 4 & \text{si } \sigma > 0. \end{cases}$$

Lemme

$\sigma \equiv 0$ sur $[c,d] \implies x \equiv 2$ et $u(t) = 2$ p.p. sur $[c,d]$.

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Minimiser} & J(x,u) \;=\; \displaystyle\int_0^\infty e^{-2t}u(t)(1-x(t))\,dt \\ \text{slc} & x'(t) \;=\; x(t)(4-x(t)) - x(t)\,u(t)\,, \quad t \geqslant 0 \text{ p.p.} \\ & u(t) \;\in\; [0,4]\,, \quad t \geqslant 0 \text{ p.p.} \\ & x(0) \;=\; x_0 \in\,]0,4[\,. \end{array}\right.$$

$H(t,x,p,u) = p\,\{x(4-x)-ux\} - e^{-2t}u(1-x)$.

Le coéfficient de u (switching function) : $\sigma = e^{-2t}(x-1)-px$.

Le co-état p satisfait $-p' = p(4-2x-u)+ue^{-2t}, u(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma < 0 \\ 4 & \text{si } \sigma > 0. \end{cases}$

Lemme

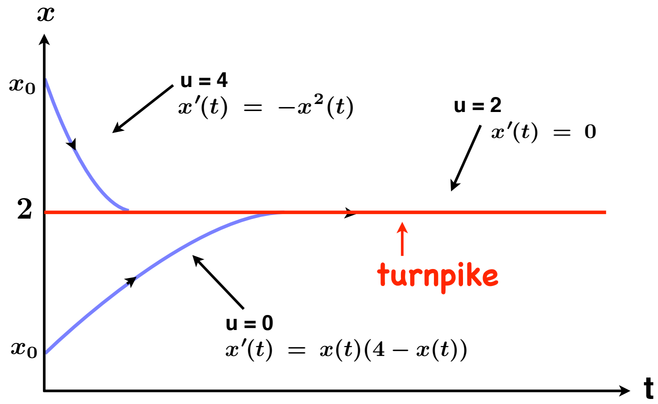
$\sigma \equiv 0$ sur $[c,d] \implies x \equiv 2$ et $u(t) = 2$ p.p. sur $[c,d]$.

Preuve On écrit (sur l'intervalle $[c,d]$)

$$\begin{aligned} \sigma &= e^{-2t}(x-1) - px = 0, \qquad \implies px = e^{-2t}(x-1) \\ \sigma' &= -2e^{-2t}(x-1) + e^{-2t}x' - p'x - px' \\ &= -e^{-2t}\,\{2x^2 - 3x - 2\} \text{ (en remplaçant pour } x', -p') \\ &= -e^{-2t}(x-2)(2x+1) \\ &= 0 \implies x \equiv 2 \text{ (car } x(t) > 0) \implies u(t) = 2 \text{ p.p.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Il semble que les valeurs 0, 2, et 4 du contrôle u sont appelées à jouer un rôle.

On forme une conjecture de style *turnpike* : l'état optimal x est celui qui se rend le plus rapidement possible à $x = 2$, (en prenant $u = 0$ si $x_0 < 2$, ou bien $u = 4$ si $x_0 > 2$), et reste en $x = 2$ par la suite (avec $u = 2$).



Comment vérifier cette conjecture ?

On va construire (provisoirement) la fonction valeur

$$V(\tau,\alpha) \;=\; \min \int_\tau^\infty e^{-2t}u(t)(1-x(t))\,dt \;:\; x(\tau) = \alpha$$

(même f et U) sur la base de cette conjecture.

Le calcul de V est différent selon que $\alpha < 2$ où $\alpha \geq 2$.
Prenons le cas $\alpha \in\,]0,2[\,$.

On note $r(\tau,\alpha)$ le temps t tel que la solution x de l'équation différentielle

$$x' \;=\; x\,(4-x)\,, \quad x(\tau) = \alpha$$

satisfait $x(t) = 2$. (Rq : la solution x converge vers l'équilibre 4, donc r est bien défini.)

Alors le coût optimal à partir du point (τ,α) serait

$$V(\tau,\alpha) \;=\; \int_\tau^{r(\tau,\alpha)} 0\;dt \;+\; \int_{r(\tau,\alpha)}^\infty e^{-2t}\,2\,(1-2)\,dt \;=\; -e^{-2r(\tau,\alpha)}.$$

On doit vérifier l'inégalité Hamilton-Jacobi :

Lemme. Pour tout $(\tau,\alpha) \in\,]0,\infty[\times\,]0,2[$ et $u \in [0,4]$, on a

$$e^{-2\tau}u(1-\alpha) + V_\tau(\tau,\alpha) + V_\alpha(\tau,\alpha)\{\alpha(4-\alpha) - u\alpha\} \;\geq\; 0\,.$$

On a $V(\tau,\alpha) = -e^{-2r(\tau,\alpha)}$ où $r(\tau,\alpha)$ = le temps t tel que la solution x de l'équation différentielle $x' = x(4-x)$, $x(\tau) = \alpha$ satisfait $x(t) = 2$.

On mq la fonction $r(\tau,\alpha)$ est dérivable (résultat connu en edo). L'inégalité à vérifier devient

$$2e^{-2r}\{r_\tau + r_\alpha\,\alpha(4-\alpha)\} + u\{e^{-2\tau}(1-\alpha) - 2\alpha e^{-2r} r_\alpha\} \geq 0\,. \quad (*)$$

Il est clair que par définition on a

$$r(\tau,\alpha) = r(0,\alpha) + \tau \implies r_\tau = 1.$$

Sur la solution x de $x' = x(4-x)$, $x(\tau) = \alpha$, on a $r(t,x(t)) = r(\tau,\alpha)$.

On dérive afin de trouver

$$r_\tau(t,x(t)) + r_\alpha(t,x(t))\,x(t)(4-x(t)) = 0\,.$$

On insère $t = \tau$ pour obtenir $r_\alpha(\tau,\alpha) = -\{\alpha(4-\alpha)\}^{-1}$.

Il suit que le premier terme dans $(*)$ s'annulle.

Donc $(*)$ équivaut à

$$e^{-2\tau}(1-\alpha) - 2\alpha e^{-2r} r_\alpha = e^{-2\tau}\{1-\alpha+2/(4-\alpha)\} \geq 0$$
$$\iff (\alpha-2)(\alpha-3) \geq 0,$$

ce qui est apparent (car $0 < \alpha < 2$).

Le cas $\alpha \geq 2$ est traité de façon similaire (voir FC)

On en déduit (en intégrant l'inégalité Hamilton-Jacobi comme d'habitude) que pour tout (x,u) admissible on a

$$\int_0^T e^{-2t} u(t)(1-x(t))\,dt \geq V(0,x_0) - V(T,x(T)).$$

On montre assez facilement que le dernier terme tend vers 0, d'où

$$\int_0^\infty e^{-2t} u(t)(1-x(t))\,dt \geq V(0,x_0)$$

(l'intégrale étant bien définie).

Puisque la conjecture donne le coût $V(0,x_0)$ par construction, la preuve est complète (la conjecture est confirmée).

Un cas de figure en modélisation dynamique :

la gestion des ressources renouvelables

Soit $y(t)$ la taille (souvent la *biomasse*) d'une population en fonction du temps t.

La *croissance exponentielle* correspond à une croissance proportionnelle y'/y constante : $y'/y = k$.

Ceci implique $y(t) = y(0)e^{kt}$, qui ne peut pas être vrai à long terme.

La *croissance logistique* est un modèle plus réaliste qui est très courant dans la modélisation des ressources renouvelables.

Il suppose que la croissance proportionnelle y'/y diminue :

$$y'/y = k(M-y),$$

où M est la population maximale.

On étudie la célèbre équation différentielle (Verhulst 1845)

l'équation logistique $\quad y' = ky(M-y).$

$y' = ky(M-y), \quad y(0) = y_0 > 0.$

L'équadiff $\dfrac{dy}{dt} = ky(M-y)$ est séparable.

On écrit $\dfrac{dy}{y(M-y)} = k\,dt$

Ensuite on intègre des deux côtés

Une certain réécriture est très utile:

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1/M}{y} + \frac{1/M}{M-y}$$

On trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(M-y)} &= \tfrac{1}{M}\int \frac{dy}{y} + \tfrac{1}{M}\int \frac{dy}{M-y} \\ &= \tfrac{1}{M}\ln y - \tfrac{1}{M}\ln(M-y) \\ &= \tfrac{1}{M}\ln\left[\frac{y}{M-y}\right] \\ &= kt + C\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{M}\ln\left[\frac{y}{M-y}\right] = kt + C \qquad (L > 0)$$

$$\Longrightarrow \frac{y}{M-y} = e^{kMt+MC} = e^{MC}e^{kMt} = Le^{kMt}$$

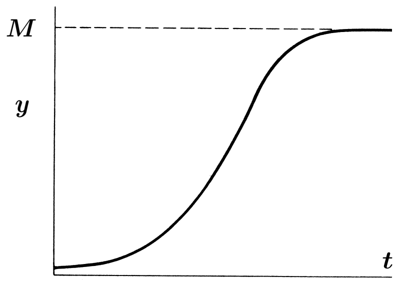
$$\Longrightarrow y(t) = M\frac{Le^{kMt}}{1+Le^{kMt}}$$

(donc $0 < y(t) < M$ toujours)

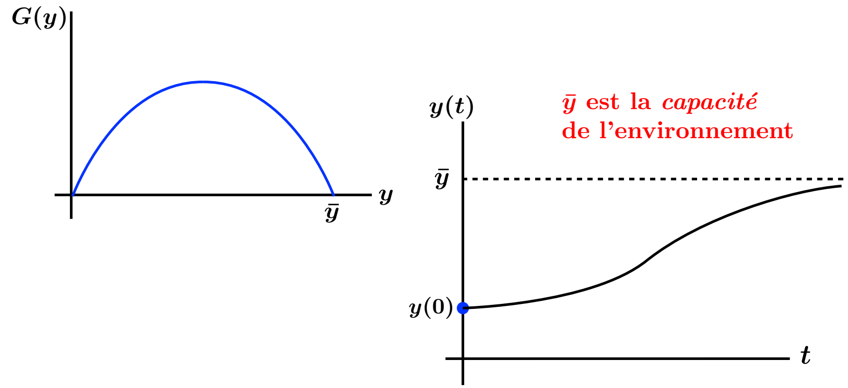
La valeur de L est déterminée par la condition initiale :

$$y_0 = y(0) = M\frac{L}{1+L}$$

On trace le graphe de $y(t)$:



De façon plus générale, on modélise par $y'(t) = G(y(t))$ l'évolution de certaines populations.



$\bar{y}$ est la *capacité* de l'environnement

Cas spécial : croissance logistique

La population satisfait la loi de croissance

$$y'(t) = ky(t)(\bar{y} - y(t))$$

On exploite la population à des fins économiques:

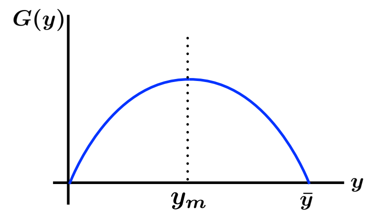
$$y'(t) = G(y(t)) - h(t)$$

Souvent les modèles utilisent l'effort u de récolte, et on suppose (par exemple)

$$h = yu \Longrightarrow y'(t) = G(y(t)) - y(t)u(t)$$

où $0 \le u \le E$.

Pendant longtemps, les biologistes ont supposé que le mieux serait de maintenir la population au niveau y_m du plus fort rendement soutenable, celui où G atteint son maximum.



Donc d'utiliser l'effort $u_m = G(y_m)/y_m$.

Pour faire une analyse plus économique, on a introduit le prix unitaire π de la biomasse et le coût k de l'effort de récolte.

Si la population est maintenue dans un équilibre en $y(t) = y$, alors

$$0 = y'(t) = G(y) - yu \implies u = G(y)/y,$$

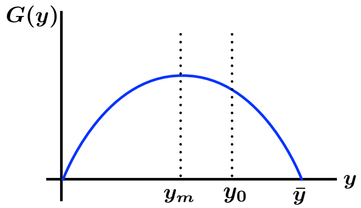
et le revenu net sera

$$\pi yu - ku = (\pi y - k)u = (\pi y - k)\frac{G(y)}{y} = \left(\pi - \frac{k}{y}\right) G(y).$$

Le meilleur y (maximisant) correspond à

$$\left[\left(\pi - \frac{k}{y}\right) G(y)\right]' = 0,$$

dont la solution est notée y_0.



Ce modèle ne correspond pas bien à la réalité observée. Pourquoi ?

Son défaut : il est statique.
Il ne considère que les équilibres, en ignorant les transitions et l'actualisation

On peut formuler un modèle dynamique mais discret pour analyser les stratégies optimales de récolte.

Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$ une partition d'un intervalle de planning $[0, T]$.

Soit $[t_i, t_{i+1}]$ un intervalle pendant lequel l'effort est u_i et la récolte $y_i u_i$.

Soient π le prix unitaire de la biomasse et k le coût de l'effort. Le revenu net au temps i sera

$$\pi y_i u_i - k u_i = (\pi y_i - k) u_i .$$

Actualisant en $t = 0$, le revenu net devient

$$\sum_{i=0}^{n} e^{-\delta t_i} (\pi y_i - k) u_i$$

On a les relations

$$y_{i+1} = y_i + [G(y_i) - y_i u_i] (t_{i+1} - t_i)$$

ainsi que les contraintes

$$0 \leq u_i \leq E.$$

Maximiser le profit net donne alors un problème standard d'optimisation, mais en un grand nombre de variables u_i, y_i avec beaucoup de contraintes, et hautement non convexe.

Pour dégager des conclusions générales, un modèle dynamique et continu plutôt que discret semble nécessaire...

Maximiser

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \{\pi y(t) - k\} u(t) dt$$

sous les contraintes

$$y'(t) = G(y(t)) - y(t)u(t) \quad (t \geq 0)$$

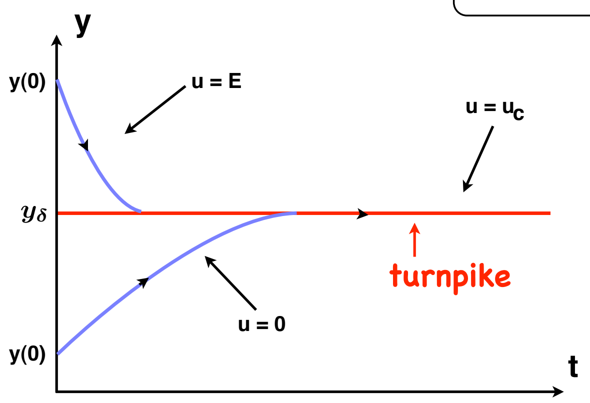
$$0 \leq u(t) \leq E, \quad y(0) \ \text{prescrit}$$

Ceci est un problème de contrôle optimal, de la sorte considérée dans l'exemple que nous venons de voir

Un modèle en ressources renouvelables

(Clark, Clarke, Munro / Econometrica)

$$y'(t) = G(y(t)) - u(t)\,y(t)$$
$$\max \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\{\pi\,y(t) - k\}\,u(t)\,dt$$
$$0 \leq u(t) \leq E$$



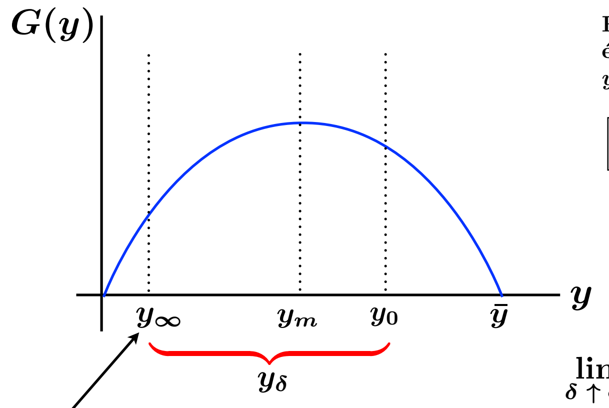
y = biomasse
u = effort de pêche
G = croissance naturelle
E = borne sur l'effort (capital)
δ = taux d'actualisation
π = prix de la ressource
k = coût de l'effort

Simple, mais... Si δ est suffisamment grand, on aura $y_\delta \approx 0$ (extinction)

Pour $\delta > 0$ on trouve que y_δ est déterminé par l'équation

$$\frac{1}{\delta}\left[G(y)\left(\pi - \frac{k}{y}\right)\right]' = \pi - \frac{k}{y}$$

comment ?



tragédie de la commune : $\pi y_\infty - k = 0$

Rappel: Le meilleur équilibre statique y_0 est donné par

$$\left[\left(\pi - \frac{k}{y}\right)G(y)\right]' = 0$$

$$\lim_{\delta \uparrow \infty} y_\delta = y_\infty$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} y_\delta = y_0$$

Un modèle avec investissement

(Clark, Clarke, Munro Econometrica 1979)

y = biomasse
E = effort disponible (capital)
u = effort appliqué
I = investissement en capital
G = loi de croissance
δ = taux d'actualisation
π = prix de la ressource
γ = taux de dépréciation
c = coût de l'investissement
k = coût de l'effort

Maximiser

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\{(\pi y(t) - k)u(t) - cI(t)\}dt - c\sum_i e^{-\delta t_i}\Delta E(t_i)$$

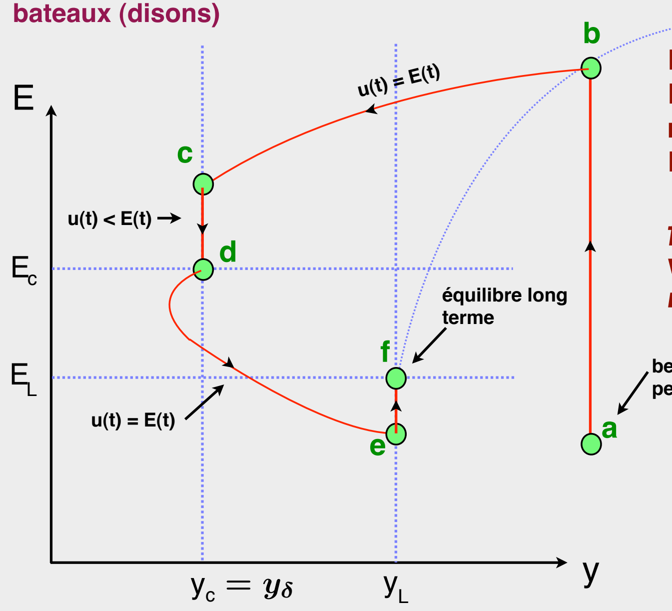
investissements instantanés

s.l.c.

$$y'(t) = G(y(t)) - u(t)y(t),\ 0 \leqslant u(t) \leqslant E(t)$$
$$E'(t) = -\gamma E(t) + I(t),\ 0 \leqslant I(t) \leqslant +\infty$$

Ici, on a $n = m = 2$. L'état est (y, E) et le contrôle est (u, I).

Stratégie optimale en présence d'investissement ET dépréciation des bateaux (disons)



Preuve : Principe du maximum de Pontryagin et

fonctions vérificatrices non lisses

Pour le TD :

préparer les exos 9, 12, 13, 14
de la Fiche 2

53

Fin des diapos du cinquième cours

54