Optimisation II

CM2

printemps 2017

cours de
Francis Clarke

clarke@math.univ-lyon1.fr

CM1 = Calcul des variations : la théorie classique

CM2 = Calcul des variations : la méthode déductive
(existence et régularité)

Détails : chapitres 14, 15 et 16 de FC

rappel

FC = "Functional analysis, calculus of variations and optimal control" par Francis Clarke

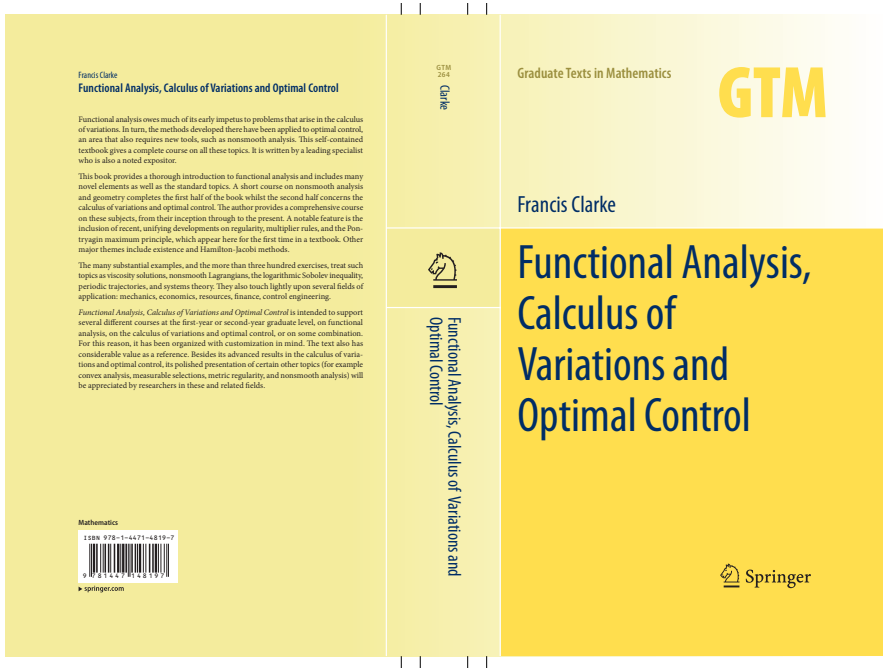
Graduate Texts in Mathematics 264, Springer-Verlag 2013

Achat : www.springer.com 59€ le livre élec, 72€ le vrai

Amazon.fr 44€ le vrai

Les diapos :

Aller sur le site web de la Licence math, choisir "Licence 2ème année", ensuite cliquer sur "page de cours" près du nom Francis Clarke... regarder vers le bas



rappel

Le problème de base en calcul des variations

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A,\ x(b) = B.$$

On prend les fonctions $x(\cdot)$ dans $C^2[a,b]$, et on suppose que L est de classe C^3.

conditions nécessaires

Théorème (Euler 1744)

Si x_* est solution de (P), alors x_* satisfait *l'équation d'Euler* :

$$\frac{d}{dt}\left\{ L_v(t, x_*(t), x_*'(t)) \right\} = L_x(t, x_*(t), x_*'(t)) \quad \forall t \in [a,b].$$

Corollaire (condition de Erdmann) Si x_* est solution locale du problème de base, et si L est autonome (ne dépend pas de t), alors il existe une constante c telle que

$$L(x_*(t), x_*'(t)) - x_*'(t) L_v(x_*(t), x_*'(t)) = c \quad \forall t \in [a,b].$$

Théorème (Legendre 1783) Soit x_* un minimum local de (P). Alors x_* satisfait la condition de Legendre :

$$L_{vv}(t, x_*(t), x_*'(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

conditions suffisantes

Théorème (Jacobi 1838) Soit x_* une extrémale sur $[a,b]$ qui satisfait la condition renforcée de Legendre: $L_{vv}(t, x_*(t), x_*'(t)) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$. Alors x_* est un minimum local à court terme pour (P).

Théorème Si x_* est une extrémale admissible pour (P), et si la fonction $(x,v) \mapsto L(t,x,v)$ est convexe pour chaque $t \in [a,b]$, alors x_* est solution globale de (P).

c'est des approches inductives

exemple

Exer. 4.22 Un modèle de production économique mène au problème

$$\min \int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), x'(t)) x'(t)\,dt\,,\ x \in C^2[0,1]\,,\ x(0) = 0,\ x(T) = \bar{x},$$

où $\delta \geq 0$ est le taux d'actualisation et C le coût marginal de production.

(a) Lorsque $C(x,v) = v$, résoudre le problème par la méthode déductive : prouver qu'une solution $x_\delta(\cdot) \in C^2[0,1]$ existe ; la trouver ensuite par les conditions nécessaires.

(b) Étudier les limites de $x_\delta(t)$ lorsque δ converge vers $+\infty$, et ensuite lorsque δ converge vers 0. Expliquer les réponses par un argument économique.

(c) Prouver que quand $\delta > 0$ et $C(x,v) \equiv c_0 > 0$, le problème n'a pas de solution. Expliquer par un raisonnement économique ce phénomène.

(a) $L(t,x,v) = e^{-\delta t} v^2 \qquad \frac{d}{dt}\left\{ e^{-\delta t} 2x' \right\} = 0 \implies$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\bar{x}}{e^{\delta T} - 1}\left(e^{\delta t} - 1\right) & \text{si } \delta > 0 \\ \frac{\bar{x}}{T} t & \text{si } \delta = 0. \end{cases}$$

C'est la solution globale puisque $L(t,x,v)$ est convexe en (x,v)

Exer. 4.22 Un modèle de production économique mène au problème **exemple**

$$\min \int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), x'(t)) x'(t)\, dt\,,\ x \in C^2[0,1],\ x(0) = 0,\ x(T) = \bar{x},$$

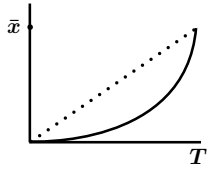
où $\delta \geq 0$ est le taux d'actualisation et C le coût marginal de production.

(a) Lorsque $C(x,v) = v$, résoudre le problème par la méthode déductive : prouver qu'une solution $x_\delta(\cdot) \in C^2[0,1]$ existe ; la trouver ensuite par les conditions nécessaires.

(b) Étudier les limites de $x_\delta(t)$ lorsque δ converge vers $+\infty$, et ensuite lorsque δ converge vers 0. Expliquer les réponses par un argument économique.

(c) Prouver que quand $\delta > 0$ et $C(x,v) \equiv c_0 > 0$, le problème n'a pas de solution. Expliquer par un raisonnement économique ce phénomène.

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\bar{x}}{e^{\delta T}-1}\left(e^{\delta t} - 1\right) & \text{si } \delta > 0 \\ \frac{\bar{x}}{T} t & \text{si } \delta = 0. \end{cases}$$



$\delta \to \infty$: $x(t)$ tend vers la fonction nulle ; on repousse le coût de production vers la fin de l'horizon.

$\delta = 0$: Le taux de production x' est constant ; cela minimise le coût, aucune raison de favoriser la production plus rapide.

Exer. 4.22 Un modèle de production économique mène au problème **exemple**

$$\min \int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), x'(t)) x'(t)\, dt\,,\ x \in C^2[0,1],\ x(0) = 0,\ x(T) = \bar{x},$$

où $\delta \geq 0$ est le taux d'actualisation et C le coût marginal de production.

(a) Lorsque $C(x,v) = v$, résoudre le problème par la méthode déductive : prouver qu'une solution $x_\delta(\cdot) \in C^2[0,1]$ existe ; la trouver ensuite par les conditions nécessaires.

(b) Étudier les limites de $x_\delta(t)$ lorsque δ converge vers $+\infty$, et ensuite lorsque δ converge vers 0. Expliquer les réponses par un argument économique.

(c) Prouver que quand $\delta > 0$ et $C(x,v) \equiv c_0 > 0$, le problème n'a pas de solution. Expliquer par un raisonnement économique ce phénomène.

(c) $L(t,x,v) = e^{-\delta t} c_0 v$

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^T e^{-\delta t} c_0 x'(t)\, dt \\ &= c_0 e^{-\delta t} x(t)\Big|_0^T + \delta c_0 \int_0^T e^{-\delta t} x(t)\, dt \\ &= c_0 e^{-\delta T} \bar{x} + \delta c_0 \int_0^T e^{-\delta t} x(t)\, dt \\ &\geq c_0 e^{-\delta T} \bar{x} \quad \text{(pas atteint)} \end{aligned}$$

Exer. 4.22 Un modèle de production économique mène au problème

$$\min \int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), x'(t)) x'(t)\, dt\,,\ x \in C^2[0,1],\ x(0) = 0,\ x(T) = \bar{x},$$

où $\delta \geq 0$ est le taux d'actualisation et C le coût marginal de production.

(a) Lorsque $C(x,v) = v$, résoudre le problème par la méthode déductive : prouver qu'une solution $x_\delta(\cdot) \in C^2[0,1]$ existe ; la trouver ensuite par les conditions nécessaires.

(b) Étudier les limites de $x_\delta(t)$ lorsque δ converge vers $+\infty$, et ensuite lorsque δ converge vers 0. Expliquer les réponses par un argument économique.

(c) Prouver que quand $\delta > 0$ et $C(x,v) \equiv c_0 > 0$, le problème n'a pas de solution. Expliquer par un raisonnement économique ce phénomène.

(d) un autre exemple : $C(x,v) = (1+x^2)^2 v\,, \delta = 0 \implies \underbrace{L(t,x,v) = (1+x^2)^2 v^2}_{\text{pas convexe}}$

Euler : $\frac{d}{dt}\left\{(1+x^2)^2 2x'\right\} = 2(1+x^2)2xx'^2$

Erdmann : $(1+x^2)^2 x'^2 = c^2$

$$\implies (1+x^2)dx = c\,dt \implies x(t) + \tfrac{1}{3}x^3(t) = \frac{\bar{x} + \frac{1}{3}\bar{x}^3}{T}\, t$$

Ceci définit la solution. S'il y en a une !

Le problème abstrait

$$\text{(P)} \quad \min_A f$$

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- **Prouver qu'une solution de (P) existe ;**
- **Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions ;**
- **Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.**

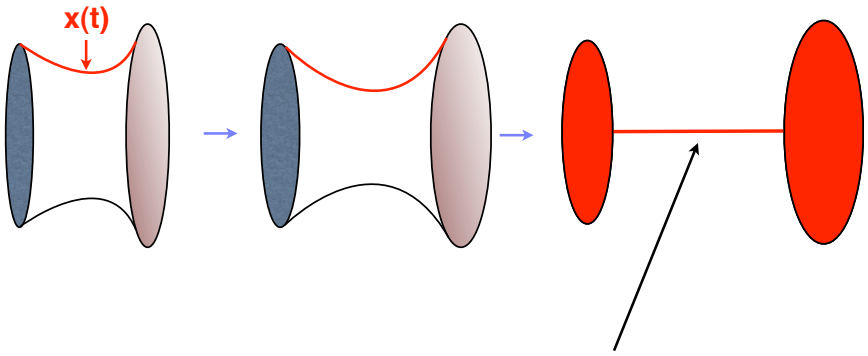
Le théorème de Jacobi et la convexité sont des approches inductives

En dimension finie, la méthode déductive s'applique en invoquant la continuité et la compacité (théorème d'existence de Weierstrass)

Qu'en est-il de la méthode déductive en calcul des variations ?

Il faudrait des théorèmes d'existence

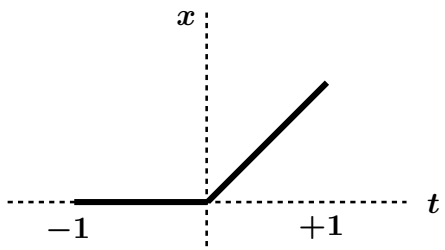
Retour à la pellicule savonneuse : solutions non lisses



La solution de Goldschmidt (1831)

exemple

$$\min \quad \int_{-1}^{1} x^2 \left(x' - 1\right)^2 dt \ : \ x(-1) = 0,\ x(1) = 1.$$



Exer : montrer qu'aucune fonction lisse réalise le inf dans ce problème

Il faut donc envisager des solutions non lisses

> *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées.* Hermite

Rq : quelle chance pour nous : "l'anglais n'est jamais que le français mal prononcé" :

I turn away with fright and horror from this lamentable plight of functions which have no derivatives

Une classe utile consiste des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle.

On dit que $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *lipschitzienne* lorsqu'il existe M tel que

$$|x(s) - x(t)| \le M|s-t|, \quad s,t \in [a,b].$$

On apprend dans un cours d'intégration et mesure de Lebesgue qu'une telle fonction n'est pas seulement continue (évident), mais qu'elle est dérivable presque partout, et que

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(s)\,ds, \quad t \in [a,b].$$

Il est clair que $|x'(t)| \le M$ p.p.

Proposition. x est lipschitzienne ssi il existe $v \in L^\infty$ t.q.

$$x(t) = x(a) + \int_a^t v(s)\,ds.$$

On étend le problème à la classe Lip [a,b]

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, \; x(b) = B.$$

Mais comment obtenir (ou même exprimer) l'équation d'Euler lorsque la solution vit dans Lip[a,b] ?

$$\frac{d}{dt}\left\{\Lambda_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big)\right\} = \Lambda_x\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) \;\; \forall t \in [a,b].$$

15.2 Theorem. (du Bois-Raymond 1879) *Let $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ be a weak local minimizer for the basic problem* (P). *Then x_* satisfies the* **integral Euler equation:** *for some constant $c \in \mathbb{R}^n$, we have*

$$\Lambda_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) = c + \int_a^t \Lambda_x\big(s, x_*(s), x_*'(s)\big)\,ds, \;\; t \in [a,b] \text{ a.e.}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\Lambda_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big)\right\} = \Lambda_x\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) \;\; \forall t \in [a,b].$$

Rq : On voit que les deux formes sont équivalentes quand x_* est C^2.

15.2 Theorem. (du Bois-Raymond 1879) *Let $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ be a weak local minimizer for the basic problem* (P). *Then x_* satisfies the* **integral Euler equation:** *for some constant $c \in \mathbb{R}^n$, we have*

$$\Lambda_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) = c + \int_a^t \Lambda_x\big(s, x_*(s), x_*'(s)\big)\,ds, \;\; t \in [a,b] \text{ a.e.}$$

démonstration (p.309) : On fixe une telle variation y, et on considère la fonction g d'une seule variable suivante :

$$g(\lambda) = J(x_* + \lambda y) = \int_a^b L(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y')\,dt.$$

The difference quotient whose limit is $g'(0)$ is given by

$$\int_a^b \frac{\Lambda(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y') - \Lambda(t, x_*, x_*')}{\lambda}\,dt.$$

Our hypotheses imply that Λ is Lipschitz with respect to (x,v) on bounded sets. Since all the functions appearing inside the integral above are bounded, there is a constant K such that, for all λ near 0, the integrand is bounded by $K|(y(t), y'(t))|$. It now follows from Lebesgue's dominated convergence theorem that $g'(0)$ exists and is given by

$$g'(0) = \int_a^b \left[\alpha(t) \bullet y(t) + \beta(t) \bullet y'(t)\right] dt = 0,$$

where (as before, but now with gradients instead of partial derivatives)

$$\alpha(t) = \Lambda_x\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big), \;\; \beta(t) = \Lambda_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big).$$

We apply integration by parts, but now to the *first* term in the integral; this yields

$$\int_a^b \left[\beta(t) - \int_a^t \alpha(s)\,ds\right] \cdot y'(t)\,dt = 0.$$

For any $c \in \mathbb{R}^n$, we also have

$$\int_a^b \left[\beta(t) - c - \int_a^t \alpha(s)\,ds\right] \cdot y'(t)\,dt = 0.$$

This holds, then, for all Lipschitz variations y and all constants $c \in \mathbb{R}^n$. We now choose c such that the function

$$y(t) = \int_a^t \left[\beta(t) - c - \int_a^t \alpha(s)\,ds\right] dt$$

defines a variation (that is, such that $y(b) = 0$). With this choice of y, we discover

$$\int_a^b \left|\beta(t) - c - \int_a^t \alpha(s)\,ds\right|^2 dt = 0,$$

which implies the desired conclusion. □

le co-état

15.2 Theorem. (du Bois-Raymond 1879) *Let $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ be a weak local minimizer for the basic problem* (P). *Then x_* satisfies the* **integral Euler equation:** *for some constant $c \in \mathbb{R}^n$, we have*

$$\Lambda_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) = c + \int_a^t \Lambda_x\big(s, x_*(s), x_*'(s)\big)\,ds, \quad t \in [a,b] \text{ a.e.}$$

On pose

$$p(t) = c + \int_a^t \Lambda_x\big(s, x_*(s), x_*'(s)\big)\,ds.$$

Alors la fonction p (le *co-état*) satisfait

$$\big(p'(t), p(t)\big) = \nabla_{x,v}\Lambda\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) \text{ p.p.}$$

Rq : L'équation d'Euler intégrée en forme *hamiltonienne* :

$$-p'(t) = H_x\big(t, x(t), p(t)\big), \quad x'(t) = H_p\big(t, x(t), p(t)\big)$$

où H est l'hamiltonien obtenu de L par la transformée de Legendre.

Rq : Dans certains cas, la continuité de p implique celle de x_*' : une conclusion de *régularité* (ou régularité lisse).

15.5 Theorem. *Let $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ satisfy the integral Euler equation, where, for almost every $t \in [a,b]$, the function $v \mapsto \Lambda(t, x_*(t), v)$ is strictly convex. Then x_* lies in $C^1[a,b]$.*

(la preuve est basée sur la continuité du co-état p)

15.7 Theorem. (Hilbert-Weierstrass c. 1875) *Let $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ satisfy the integral Euler equation, where Λ is of class C^m $(m \geqslant 2)$ and satisfies*

$$t \in [a,b], v \in \mathbb{R}^n \implies \Lambda_{vv}(t, x_*(t), v) > 0 \text{ (positive definite)}.$$

Then x_* belongs to $C^m[a,b]$.

(ici aussi, et en plus le théorème des fonctions implicites)

Le problème de base en calcul des variations n > 1

Minimiser

$$\int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A, \; x(b) = B.$$

On traite le problème où x est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, c-à-d, l'inconnue est une fonction $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

La théorie ne change pas, mais l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dt}\big\{L_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big)\big\} = L_x\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big)$$

correspond maintenant à un *système* d'équations différentielles.

exemple

Exer. 4.15 Résoudre le problème suivant :

$$\text{minimiser} \int_0^1 \big(x'(t)^2 + y'(t)^2 + x'(t)y'(t) - tx'(t)\big)\,dt \;:\; x, y \in C^2[0,1]$$

sous les contraintes $x(0) = x(1) = 0$, $y(0) = y(1) = 0$.

$$L(t,x,y,v,w) \;=\; v^2 + w^2 + vw - tv$$

Euler : $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2x' + y' - t \\ 2y' + x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ici, le co-état sera aussi de dimension deux, on pourrait le noter (p,q), par exemple.

Le co-état est utile pour exprimer les conditions de transversalité qui se joignent à l'équation d'Euler dans les problèmes où x(a) et/ou x(b) ne sont pas simplement fixés au bord.

Exemple Soit $x_* \in C^2$ solution du problème

$$\min\ \ell(x(b)) + \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,dt \quad \text{s.l.c.} \quad x(a) = A.$$

Alors (en adaptant le sens d'une variation, voir Th. 14.19) on trouve non seulement l'équation d'Euler mais aussi une autre conclusion (qui compense le manque d'info en $t = b$) :

$$-L_v(b, x_*(b), x_*'(b)) \;=\; \ell'(x_*(b)).$$

En terme du co-état, cela affirme : $-p(b) \;=\; \nabla\ell(x_*(b))$.

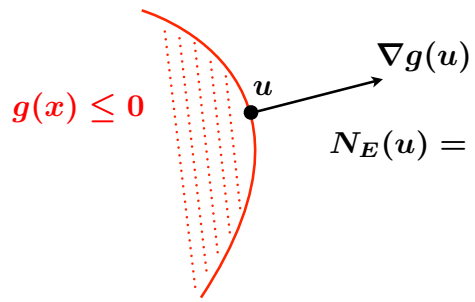
Plus tard, on admettra des contraintes telle $x(b) \in E$. Dans ce cas, la condition de transversalité est

$$-p(b) \;\in\; N_E(x_*(b)),$$

où N_E veut dire le *cône normal* (à l'ensemble E au point $x_*(b)$).

On rappelle le cône normal à un ensemble, dans les deux cas principaux : ensemble lisse (variété avec bord), ensemble convexe.

$E = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le 0\}$ Soit u un point dans E

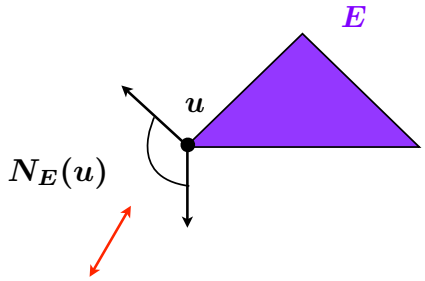


$$N_E(u) = \{t\nabla g(u) : t \ge 0\}$$

$$N_E(u) = \{0\} \text{ lorsque } u \in \operatorname{int} E$$

On rappelle le cône normal à un ensemble, dans les deux cas principaux : ensemble lisse (variété avec bord), ensemble convexe.

Soit E une partie convexe dans $\mathbb{R}^n$ et u un point dans sa frontière



$$\zeta \in N_E(u) \iff \langle \zeta, x-u \rangle \leq 0 \; \forall \, x \in E$$

On discute maintenant de la Méthode déductive

L'étude de l'existence nécéssite l'utilisation d'outils de l'analyse fonctionnelle : intégrale de Lebesgue, semicontinuité, Arzelà-Ascoli, dualité des espaces de Banach, compacité faible ... voir FC.

Stratégie Pour prouver l'existence d'une solution du problème $\min_A f$, on se donne une suite (x_i) *minimisante* : une suite de points dans A (admissibles) tels que

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) \;=\; \inf_A f\,.$$

Ensuite, on veut pouvoir affirmer l'existence d'une sous-suite qui converge vers une limite x_* (compacité). (Ce n'est pas la peine de changer la notation de la sous-suite.) Il faudrait pouvoir dire que $\lim_{i\to\infty} x_i \;=\; x_* \in A$ (que A est fermé).

Enfin, la supposée continuité de f nous permettrait écrire

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) \;=\; \inf_A f \;=\; f(x_*).$$

Du coup, x_* est solution (un point dans A où le inf est atteint).

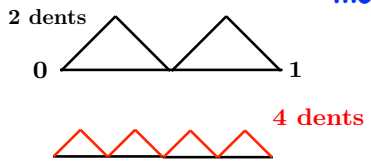
Les espaces C^2 et Lip conviennent en ce qui concerne les conditions nécessaires, mais pas pour l'existence à priori... manque de compacité. Et la continuité pose problème aussi...

exemple

$$\min \quad \int_0^1 \left[x^2 + \left(x'^2 - 1\right)^2\right] dt \;:\; x(0) = 0,\; x(1) = 0.$$

aucune fonction réalise le inf (= 0) dans ce problème, même dans Lip

les fonctions dents de scie montre que l'inf = 0



On a $J(x_i) \to 0$, et les x_i tendent vers 0, mais $J(0) = 1$.

C'est Tonelli qui, en 1912, a montré comment exploiter la compacité faible dans les espaces L^p de Lebesgue (ainsi que la semi-continuité)

Convergence des fonctions Soit (v_n) une suite de fonctions numériques sur $[a,b]$. On connait déjà qq notions de convergence :

convergence simple On dit que la suite de fonctions (v_n) converge simplement (ou ponctuellement) vers la fonction limite v sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si, pour chaque $t \in [a,b]$, la suite de nombres réelles $(v_n(t))$ converge vers la limite $v(t)$.

convergence uniforme On dit que la suite de fonctions (v_n) converge uniformément vers la fonction limite v sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si

$$\|v_n - v\|_{C[a,b]} := \sup_{t \in [a,b]} |v_n(t) - v(t)| \to 0.$$

convergence dans L^p On dit que la suite de fonctions (v_n) converge dans L^p vers v sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si

$$\|v_n - v\|_{L^p[a,b]} := \left\{ \int_a^b |v_n(t) - v(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

convergence faible Soit (v_n) une suite de fonctions dans $L^p := L^p(a,b)$, où $1 < p < \infty$, et soit $v \in L^p$.

On dit que (v_n) converge faiblement vers v si

(1) la suite est bornée dans L^p

(2) pour chaque fonction $g \in C_c^\infty(a,b)$, on a

$$\int_a^b v_n(t) g(t) \, dt \to \int_a^b v(t) g(t) \, dt .$$

convergence faible Soit (v_n) une suite de fonctions dans $L^p := L^p(a,b)$, où $1 < p < \infty$, et soit $v \in L^p$.

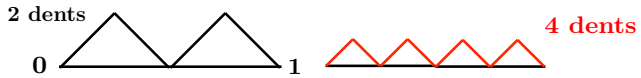
On dit que (v_n) converge faiblement vers v si

(1) la suite est bornée dans L^p

(2) pour chaque fonction $g \in C_c^\infty(a,b)$, on a

$$\int_a^b v_n(t) g(t) \, dt \to \int_a^b v(t) g(t) \, dt .$$

Exemple



Soit (x_n) une suite de fonctions sur $[0,1]$ en 2^n dents de scie, ayant $v_n(t) := x_n'(t) = \pm 1$ p.p. Les x_n converge uniformément vers 0.

La suite (v_n) est dans L^p (pour tout $p \in]1,\infty[$). En fait, sur la sphère unité de L^p.

Elle ne converge pas simplement, ni dans L^p, mais elle converge faiblement vers 0 dans L^p.

Preuve : Soit $g \in C_c^\infty(a,b)$. On a (intégration par parties)

$$\int_0^1 v_n(t) g(t) \, dt = -\int_0^1 x_n(t) g'(t) \, dt \to 0 .$$

convergence faible Soit (v_n) une suite de fonctions dans $L^p := L^p(a,b)$, où $1 < p < \infty$, et soit $v \in L^p$.

On dit que (v_n) converge faiblement vers v si

(1) la suite est bornée dans L^p

(2) pour chaque fonction $g \in C_c^\infty(a,b)$, on a

$$\int_a^b v_n(t) g(t) \, dt \to \int_a^b v(t) g(t) \, dt .$$

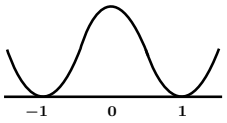
Proposition. Soit (v_n) une suite de fonctions dans L^p qui converge faiblement vers v. Soit V une partie convexe fermée. Si, pour chaque n, on a $v_n(t) \in V$ p.p., alors il en est de même pour v.

Théorème (Banach) Soit (v_n) une suite bornée de fonctions dans L^p, où $1 < p < \infty$. Alors il existe une sous-suite qui converge faiblement vers une limite v dans L^p.

La convergence faible préserve-t-elle les limites ?

Exemple

Soit (x_n) la suite de fonctions sur $[0,1]$ en 2^n dents de scie, ayant $v_n(t) := x_n{}'(t) = \pm 1$ p.p. Les x_n converge uniformément vers 0, et les (v_n) convergent faiblement vers 0.



Soit $L(v) = (v^2-1)^2$. On a

$$\int_0^1 L(v_n(t))\,dt \;=\; 0\;\forall n\,, \qquad \int_0^1 L(0)\,dt \;=\; 1.$$

Proposition. Soit $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et soit (v_n) une suite qui converge faiblement dans L^p vers une limite v. Alors

$$\int_a^b L(v(t))\,dt \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \int_a^b L(v_n(t))\,dt\,.$$

Quand L est convexe, l'intégrale de L définit une fonction semi-continue inférieurement (sci)

Pour une fonction f qui est sci, on a

$$u_i \to u \implies f(u) \;\leq\; \liminf_{i\to\infty} f(u_i).$$

Nous allons appliquer ces résultats au cas où les v_n sont les dérivées x_n' de fonctions x_n. On travaille avec les fonctions x qui sont *absolument continue*.

Définition. Une fonction $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue s'il existe une fonction $v \in L^1(a,b)$ telle que

$$x(t) \;=\; x(a) + \int_a^t v(s)\,ds\,.$$

$\mathrm{Lip}[a,b] \subset \mathrm{AC}[a,b]$

On sait que dans ce cas, on a $x'(t) = v(t)$ p.p.

L'espace $\mathrm{AC}^p[a,b]$ veut dire les fonctions continues x admettant une fonction $v \in L^p$ telle que

$$x(t) \;=\; x(a) + \int_a^t v(\tau)\,d\tau\,, \quad t \in [a,b].$$

Proposition. Soit (x_n) une suite de fonctions dans $\mathrm{AC}^p[a,b]$, avec $x_n(a) = A\;\forall n$, telle que la suite (x_n') converge faiblement dans L^p (où $1 < p < \infty$) vers une limite v. Alors (x_n) converge uniformément vers x, où x est donné par

$$x(t) \;=\; A + \int_a^t v(s)\,ds\,.$$

On va maintenant présenter le célèbre théorème d'existence de Tonelli

Minimiser

$$\int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t))\,dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A,\; x(b) = B.$$

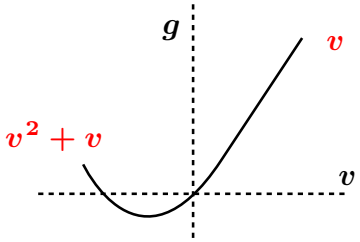
16.2 Theorem. (Tonelli 1915) *Let the Lagrangian $\Lambda(t,x,v)$ be continuous, convex in v, and* coercive *of degree $r > 1$: for certain constants $\alpha > 0$ and β we have*

$$\Lambda(t,x,v) \;\geqslant\; \alpha|v|^r + \beta \;\;\forall (t,x,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

Then the basic problem (P) *admits a solution in the class* $\mathrm{AC}[a,b]$.

$\mathrm{AC}^r[a,b]$

Pourquoi la coercivité de dégré > 1 ?
Pourquoi la convexité en v ?



exemple
(il faut coercif d'ordre r > 1)

$$\min \int_0^1 \left(x^2 + g(x')\right)\,dt \;:\; x(0) = 0,\; x(1) = 1.$$

aucune fonction réalise le inf dans ce problème

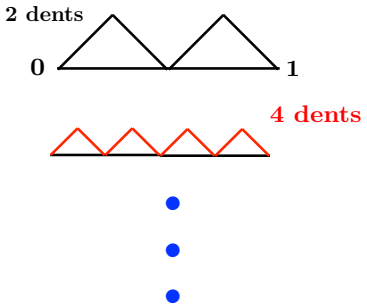
détails : FC page 323

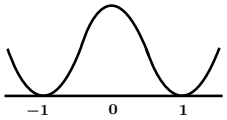
exemple

$$\min \quad \int_0^1 \left[x^2 + \left(x'^2 - 1\right)^2\right] dt \ : \ x(0) = 0,\ x(1) = 0.$$

aucune fonction réalise le inf (= 0) dans ce problème

les fonctions dents de scie montre que l'inf = 0

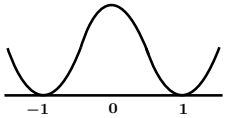




ici il manque la convexité

Observation de Weierstrass : Si on avait une solution x pour un lagrangien comme celui-ci, alors x′ ne pourrait pas être = 0

car on pourrait osciller entre x′ = 1 et x′ = -1 et ainsi réduire le coût...



ici il manque la convexité

Théorème (condition de Weierstrass) Soit $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ solution de (P). Alors pour chaque $t \in [a,b]$ p.p., on a

$$L\big(t, x_*(t), x_*'(t) + v\big) - L\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) \ \geqslant \ \langle \underbrace{p(t)}, v \rangle \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

$$p(t) = L_v(t, x_*(t), x_*'(t))$$

le célèbre théorème d'existence de Tonelli

Minimiser

$$\int_a^b \Lambda(t, x(t), x'(t))\, dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A,\ x(b) = B.$$

16.2 Theorem. (Tonelli 1915) *Let the Lagrangian $\Lambda(t,x,v)$ be continuous, convex in v, and* coercive *of degree $r > 1$: for certain constants $\alpha > 0$ and β we have*

$$\Lambda(t,x,v) \ \geqslant \ \alpha |v|^r + \beta \ \ \forall (t,x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Then the basic problem (P) *admits a solution in the class* $\mathrm{AC}[a,b]$.

solution dans $\mathrm{AC}^r[a,b]$

Pourquoi la coercivité de dégré > 1 ?
Pourquoi la convexité en v ?

Proof. It is clear that there exist admissible arcs x for which $J(x)$ is finite (for example, take x to be the unique affine admissible arc). Accordingly, there exists a minimizing sequence x_i of admissible functions for (P):

$$\lim_{i \to \infty} J(x_i) \ = \ \inf(\mathrm{P}) \ \ (\text{finite}).$$

idée de la preuve

For all i sufficiently large, in view of the coercivity, we have

$$\int_a^b \left\{ \alpha \left|x_i'\right|^r + \beta \right\} dt \ \leqslant \ \int_a^b \Lambda\left(t, x_i, x_i'\right) dt \ \leqslant \ \inf(\mathrm{P}) + 1.$$

This implies that the sequence x_i' is bounded in $L^r[a,b]^n$.

On peut donc supposer que les x_i' convergent faiblement vers une certaine fonction $v = x_*'$, où x_* est une fonction admissible (compacité faible dans L^p).

Les x_i converge uniformément vers x_*.

La fonctionnelle

$$(x, v) \mapsto \int_a^b \Lambda(t, x(t), v(t))\, dt$$

étant sci par rapport à ces convergences (pas facile), on en déduit

$$J(x_*) \ \leq \ \lim_{i \to \infty} J(x_i) \ = \ \inf(\mathrm{P}).$$

Il vient que x_* est solution du problème (P). □

16.2 Theorem. (Tonelli 1915) *Let the Lagrangian $\Lambda(t,x,v)$ be continuous, convex in v, and* coercive *of degree $r>1$: for certain constants $\alpha>0$ and β we have*

$$\Lambda(t,x,v) \geqslant \alpha|v|^r+\beta \quad \forall (t,x,v)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

Then the basic problem (P) *admits a solution in the class* $\mathrm{AC}[a,b]$.

solution dans $\mathrm{AC}^r[a,b]$

On peut étendre la preuve à certains cas où le lagrangien n'est pas minoré par une constante. Un exemple simple :

Extension de théorème de Tonelli (voir FC 16.10)

Dans le théorème de Tonelli, on modifie l'hypothèse de coercivité (seulement) ainsi :

$$\Lambda(t,x,v) \;\geq\; \alpha|v|^r-\gamma|x|^s+\beta \quad \forall (t,x,v)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,$$

où $\gamma\geqslant 0$, $0<s<r$, et où, comme avant, $r>1$, $\alpha>0$. Alors il existe une solution dans AC^r.

Le théorème de Tonelli (sa démonstration) s'étend facilement aux problèmes qui imposent des contraintes unilatérales sur x et v.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Minimiser} \quad \displaystyle\int_a^b \Lambda(t,x(t),x'(t))\,dt \\ \text{sous les contraintes } x(a)=A, x(b)=B \text{ ainsi que} \\ \quad x(t)\in S \;\; (t\in[a,b]), \quad x'(t)\in V \;\; (t\in[a,b] \text{ p.p.})\end{array}}$$

Pour l'existence, il suffit que S soit fermé et V fermé convexe, et que la coercivité/convexité de L tiennent sur [a,b]xSxV. (Et que l'ensemble des fonctions admissibles soit non vide !)

Avec le théorème de Tonelli, on a l'existence d'une solution dans AC. La voie semble ouverte pour appliquer la méthode déductive.

Petit détail : le prochain pas consiste à appliquer les conditions nécessaires (équation d'Euler). Nous les avions obtenues dans C^2 et dans Lip, mais pas dans AC.

Ce petit détail s'avère être un véritable ennui : l'équation de Euler peut faire défaut quand la dérivée de la solution (qui est dans AC) n'est pas bornée !

où est la difficulté ?

On fixe une telle variation y, et on considère la fonction g d'une seule variable suivante :

$$g(\lambda) \;=\; J(x_*+\lambda y) \;=\; \int_a^b L(t,x_*+\lambda y,x_*'+\lambda y')\,dt.$$

Il suit que g est dérivable, et que "la dérivée de l'intégrale est l'intégrale de la dérivée" :

$$g'(\lambda) \;=\; \int_a^b \big[\,L_x(t,x_*+\lambda y,x_*'+\lambda y')\,y + L_v(t,x_*+\lambda y,x_*'+\lambda y')\,y'\,\big]\,dt.$$

On a produit un exemple en 1984 où l'équation d'Euler ne tient pas (sous les hypothèses de Tonelli)

Remède : Si on pouvait prouver que la solution est dans Lip... résultat de régularité (de la solution)

16.13 Theorem. (Tonelli-Morrey) *Let Λ admit gradients Λ_x, Λ_v which, along with Λ, are continuous in (t,x,v). Suppose further that for every bounded set S in $\mathbb{R}^n$, there exist a constant c and a summable function d such that, for all $(t,x,v) \in [a,b]\times S\times\mathbb{R}^n$, we have*

$$\big|\Lambda_x(t,x,v)\big| + \big|\Lambda_v(t,x,v)\big| \leqslant c\big(|v| + \big|\Lambda(t,x,v)\big|\big) + d(t). \qquad (*)$$

Then any weak local minimizer x_* satisfies the Euler equation in integral form.

(hypothèse de croissance exponentielle)

Corollaire 16.16

Si en outre les hypothèses de Tonelli sont vérifiées, alors toute solution x_* du problème est lipschitzienne (appartient à Lip).

Régularité lipschitzienne pour les problèmes autonomes : un autre cas où la méthode déductive peut être mise en œuvre.

Théorème 16.18 (Clarke-Vinter 1984) Sous les hypothèses de Tonelli, quand le lagrangien est autonome, toute solution du problème dans AC appartient en fait à Lip.

Rappel (régularité lisse) :

15.5 Theorem. *Let $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ satisfy the integral Euler equation, where, for almost every $t \in [a,b]$, the function $v \mapsto \Lambda(t,x_*(t),v)$ is strictly convex. Then x_* lies in $C^1[a,b]$.*

15.7 Theorem. (Hilbert-Weierstrass c. 1875) *Let $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$ satisfy the integral Euler equation, where Λ is of class C^m $(m \geqslant 2)$ and satisfies*

$$t \in [a,b], v \in \mathbb{R}^n \implies \Lambda_{vv}(t,x_*(t),v) > 0 \text{ (positive definite)}.$$

Then x_* belongs to $C^m[a,b]$.

En combinant tous ces résultats (existence, régularité lipschitzienne, régularité lisse), on obtient :

Théorème **On suppose que le lagrangien $L(t,x,v)$ est continûment dérivable, convexe par rapport à v, et satisfait la condition de coercivité**

$$L(t,x,v) \geq \alpha|v|^r - \gamma|x| + \beta \quad \forall\,(t,x,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

pour certaines constantes avec $\alpha > 0, r > 1$. Alors le problème (P) admet une solution $x_* \in \mathrm{AC}[a,b]$.

Tonelli

Si en outre l'une des deux hypothèses supplémentaires suivantes est vérifiée :

(H1) (Tonelli-Morrey) Il existe des constantes c et d telles que, pour tout (t,x,v), on a

$$|L_x(t,x,v)| + |L_v(t,x,v)| \leqslant c(\,|v| + |L(t,x,v)|\,) + d\,;$$

(H2) (Clarke-Vinter) Le lagrangien L est autonome ;

alors $x_* \in \mathrm{Lip}[a,b]$.

régularité lipschitzienne

Si en outre L est strictement convexe en v, alors $x_* \in C^1[a,b]$. Enfin, si L est de classe C^m (où $m \geq 2$) et $L_{vv}(t,x,v) > 0$ $\forall\,(t,x,v)$, alors $x_* \in C^m[a,b]$.

régularité lisse

Prouver l'existence d'une solution $x \in C^\infty$ du problème aux limites

exemple

$$x''(t) = \cos x(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

On utilise la *méthode variationnelle*, la seule qui s'applique au problème, en posant

convexe en v $\quad L(x,v) \geq \frac{1}{2}|v|^2 - 1$

$$L(x,v) := \frac{1}{2}v^2 + \sin x\,.$$

Alors Euler $\leftrightarrow x'' = \cos x$.

$|L_x| + |L_v| = |\cos x| + |v| \;\leq\; c\,(|v| + |L|) + d$

en prenant $c = d = 1$.

Pour justifier que l'équation d'Euler admet une solution (avec les bonnes conditions au bord), on considère

L est autonome

$$\min \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}x'^2 + \sin x \right\} dt \quad x(0) = x(1) = 0.$$

On invoque le théorème d'existence et régularité pour déduire l'existence d'une solution dans C^2 ; par la suite, on trouve que $x \in C^\infty$. $\quad L_{vv} = 1 > 0$

Exer. 4.22 Un modèle de production économique mène au problème

retour à un exemple précédent

$$\min \int_0^T e^{-\delta t} C(x(t), x'(t))x'(t)\,dt\,,\; x \in C^2[0,1],\; x(0) = 0,\; x(T) = \bar{x},$$

où $\delta \geq 0$ est le taux d'actualisation et C le coût marginal de production.

(a) Lorsque $C(x,v) = v$, résoudre le problème par la méthode déductive : prouver qu'une solution $x_\delta(\cdot) \in C^2[0,1]$ existe ; la trouver ensuite par les conditions nécessaires.

(b) Étudier les limites de $x_\delta(t)$ lorsque δ converge vers $+\infty$, et ensuite lorsque δ converge vers 0. Expliquer les réponses par un argument économique.

(c) Prouver que quand $\delta > 0$ et $C(x,v) \equiv c_0 > 0$, le problème n'a pas de solution. Expliquer par un raisonnement économique ce phénomène.

convexe en v

(d) un autre exemple : $C(x,v) = (1+x^2)^2 v\,, \delta = 0 \implies \underbrace{L(t,x,v) = (1+x^2)^2 v^2}_{\text{pas convexe}}$

$L(x,v) \geq |v|^2$

Euler : $\frac{d}{dt}\left\{(1+x^2)^2 2x'\right\} = 2(1+x^2)2xx'^2$

Cdn T-M (quand x borné), ou L autonome

Erdmann : $(1+x^2)^2 x'^2 \;=\; c^2$

$$\implies (1+x^2)dx \;=\; c\,dt \implies x(t) + \tfrac{1}{3}x^3(t) = \frac{\bar{x} + \frac{1}{3}\bar{x}^3}{T}\,t$$

$L_{vv} = 2(1+x^2)^2 > 0$ $\qquad$ Donc il existe une solution dans C^∞

Ceci définit la solution. S'il y en a une !

Les diapos :

Aller sur le site web de la Licence math, choisir "Licence 2ème année", ensuite cliquer sur "page de cours" près du nom Francis Clarke (en haut, Anal III)...
ensuite regarder vers le bas de cette page

A lire : Chap. 15, 16 de FC (pages 307-334)

Pour le TD :

préparer les exos 6, 12, 13, 14, 15...

Fin des diapos du deuxième cours