Université Claude Bernard Lyon 1
Math L2 « Fonctions de plusieurs variables »
Examen : mardi 3 juillet 2018 : durée 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considérée comme une tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur une feuille imprimée recto-verso.

Ainsi que votre nom et votre numéro d'étudiant, identifier sur votre copie (en haut, très lisible) votre Parcours (c'est soit Math-Info, soit Cursus Préparatoire).

Attention : Il s'agit de traiter les exercices 1, 2, 3, 4 et un seul (au choix) des exercices 5 ou 6.

1. (3 pts) Déterminer toutes les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^a}\,dt$ converge.

$2 < a < 4$; pour 0 : f ne change pas de signe et $f \sim_0 ct^{3-a}$

2. (3 pts) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\textbf{(a)} \quad \sum n^3 e^{-\sqrt{n}} \qquad \textbf{(b)} \quad \sum (-1)^n \frac{\ln n}{n} \qquad \textbf{(c)} \quad \sum \left(e^{\frac{3}{\sqrt{n+2}}} - 1\right)$$

conv (comparaison) ; conv (thm séries alt) ; div (équiv par DL)

3. (3 pts) On s'intéresse au calcul de l'intégrale double $I := \displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 1,\, y \le 4x^2\}.$$

(a) Dessiner le domaine D.

(b) Calculer I.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{4x^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_0^{1} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{48} + \frac{15}{16} = \frac{23}{24}.$$

4. (3 pts) On considère les fonctions continues $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définies par la règle

$$f_n(x) = \frac{1}{x + (\sin x)^{2n} + 2} \qquad (x \ge 0).$$

(a) Trouver la fonction f qui est la limite simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,+\infty[$.

(b) Prouver que la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur $[0,1]$.

(c) Est-ce que la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur $[0,2]$?

(a)

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \, (k \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{x+2} & \text{autrement.} \end{cases}$$

(b)

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} \frac{|\sin^{2n} x|}{(x+2)(x+\sin^{2n} x+2)} \leq \frac{(\sin 1)^{2n}}{2\times 2} \to 0.$$

(c) Forcément pas, puisque les f_n étant continues, il viendrait (cours) que f est continue sur $[0,2]$, ce qui est faux (discontinuité en $x = \pi/2$).
Alternatif : mq $\|f_n - f\|_{\infty,[0,2]} \geq 1/(4\times 5)$.

SOIT

5. (8 points)

(a) Trouver l'équation de la droite normale à la surface de niveau

$$x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$$

au point $(1,2,-1)$.

$$(x,y,z) = (1,2,-1) + (-6,11,14)t \quad (t \in \mathbb{R})$$

(b) On considère la minimisation de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 9x + 11y + y^3 + 6y^2$$

sur le demi-plan $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$. Résoudre ce problème d'optimisation, en justifiant. [Suggestion : montrer que $(-13/2, 1)$ est un point critique de f.]

On mq f est convexe sur D (car $\nabla^2 f$ est sdp autour de D), donc le point critique (qui est dans D) correspond à un min global de f sur D.

OU

6. (8 points)

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} e^{ixt} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et expliciter F' à l'aide d'une intégrale.

3. Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y'(x) = \frac{i(1+ix)}{2(1+x^2)}\, y(x).$$

4. En déduire l'expression de F à l'aide de fonctions usuelles.

   On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction : On définit la fonction $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x,t) = e^{ixt}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

1. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

   (1. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$ en tant que composée, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   (1. b) Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= \left|e^{ixt}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

   La fonction $t\longmapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ (donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0;+\infty[$), on a $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t\to+\infty$. Par comparaisons de fonctions positives, $t\longmapsto\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

   (2. a) Les deux premiers points ont été vérifiés à la première question.

   (2. b) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$ donc elle admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$.

   (2. c) Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= \left|ie^{ixt}\sqrt{t}e^{-t}\right| \\ &= \sqrt{t}e^{-t} \end{aligned}$$

   La fonction $t\longmapsto\sqrt{t}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (donc intégrable sur $[0;A]$ pour tout $A>0$) et $\sqrt{t}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t\to+\infty$. Donc $t\longmapsto\sqrt{t}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre montre que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} ie^{ixt}\sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{t(-1+ix)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Afin de retomber sur F à partir de F', on fait une intégration par parties généralis‘‘ee, les fonctions $t \longmapsto \sqrt{t}$ et $t \longmapsto \dfrac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et leur produit admet une limite finie en 0^+ et $+\infty$. Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées donne :

$$\begin{aligned} F'(x) &= i\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{t(-1+ix)}\mathrm{d}t \\ &= i\left(\left[\sqrt{t}\frac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2(-1+ix)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{t(-1+ix)}\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{i}{2}\frac{1}{-1+ix}F(x) \\ &= \frac{i(1+ix)}{2\left(1+x^2\right)}F(x) \end{aligned}$$

4. On résout l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \dfrac{i(1+ix)}{2\left(1+x^2\right)}y(x)$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont les fonctions :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto C\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} F(x) &= C\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)\right) \\ &= C\frac{e^{i/2\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{1/4}} \end{aligned}$$

Afin de déterminer C, on calcule $F(0)$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{t}$. La fonction $t \longmapsto t^2$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, donc le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées donne :

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}(2u\mathrm{d}u) \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Comme $F(0) = C$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sqrt{\pi}\frac{e^{i/2\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{1/4}}.$$