Devoir n° 4 : correction

Exer. 1

1. Calcul classique.
2. Idem. On trouve $E_1 = \langle {}^t(1,0,1)\rangle$ et $E_{-1} = \langle {}^t(1,1,2)\rangle$. On choisit un vecteur linéairement indépendant de ces deux vecteurs propres, disons ${}^t(1,0,-1)$ (l'indépendance linéaire se justifie par un calcul de déterminant). On obtient la matrice de passage
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
et la forme triangulaire supérieure
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On doit justifier le 1 en place $(3,3)$ à l'aide du polynôme caractéristique et déterminer a et b à l'aide, par exemple, d'un système. On trouve $a = -2$ et $b = 4$.
3. Les valeurs propres d'une matrice sont des racines de son polynôme minimal.
4. La somme des dimensions des espaces propres est strictement inférieure à la taille de la matrice.
5. D'après le cours, le polynôme minimal est un diviseur unitaire du polynôme caractéristique. D'aprés les questions 1 et 3, il est donc égal à $(X+1)(X-1)$ ou à $(X+1)(X-1)^2$. Comme A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal ne peut être scindé à racines simples. Par conséquent, il est égal au polynôme caractéristique de A.

Exer. 2

1. (a) A n'est pas inversible donc admet O pour valeur propre. 0 est donc une racine de $m_A(X)$ qui se factorise par X. Comme le polynôme minimal est non nul, il existe un polynôme non nul $R(X)$ tel que $m_A(X) = XR(X)$.

   (b) On obtient que $0 = m_A(A) = AR(A)$. De plus, deux polynômes en A commutent donc, en choisissant $B = R(A)$, le résultat suit.

   (c) Supposons que $S(X)$ est un multiple de $R(X)$. Alors, il existe un polynôme $Q(X)$ tel que $S(X) = R(X)Q(X)$. Par conséquent, on a
   $$AS(A) = AR(A)Q(A) = m_A(A)Q(A) = 0.$$
   Comme deux polynômes en A commutent, on a aussi $S(A)A = 0$.
   Réciproquement, supposons que $S(A)A = AS(A) = 0$. Alors, $XS(X)$ est un polynôme annulateur de A. Ainsi, $m_A(X) = XR(X)$ divise $XS(X)$ et donc $R(X)$ divise $S(X)$.

2. (a) Comme A est inversible, 0 n'est pas une valeur propre de A donc 0 n'est pas une racine de $m_A(X)$. Soit $\lambda = m_A(0) \neq 0$. Alors 0 est racine de $m_A(x) - \lambda$ qui se factorise par X. On obtient qu'il existe un polynôme $R(X)$ tel que $m_A(X) = \lambda + XR(X)$. De plus, le degré de $m_A(X)$ est au moins égal à 1 donc $R(X)$ est non nul.

   (b) On obtient que $m_A(A) = \lambda A + AR(A)$ et donc que
   $$A\frac{R(A)}{-\lambda} = I_n.$$
   On considère le polynôme $P(X) = R(X)/(-\lambda)$. On a bien $A^{-1} = P(A)$ et $d = 1 + \deg(P)$ donc $P(X)$ est de degré $d-1$.

   (c) Soit $S(X)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-1$ vérifiant $A^{-1} = S(A)$. Alors, on obtient que $P(A) = S(A)$ et donc que $P(X) - S(X)$ est un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à $d-1$. Ce polynôme est donc divisible par $m_A(X)$. Comme le polynôme minimal de A est de degré d, il s'en suit que $P(X) - S(X) = 0$. Ainsi $S(X) = P(X)$, ce qui termine la preuve.

Exer. 3

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{1+x} & 0 \\ e^y + ye^{xy} & xe^y + xe^{xy} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. $\varphi_2(1,0) = 2$, $\partial_x \varphi_2(1,0) = 1$, $\partial_y \varphi_2(1,0) = 2 \implies \varphi_2(1+h,k) = 2 + h + 2k + \|(h,k)\|\epsilon(h,k)$.
3. $\varphi(x,y) = \varphi(r,s) \implies \ln(1+x) = \ln(1+r) \implies x = r$ (car ln est injective). Il suit que $y = s$, car la fonction $t \mapsto \varphi_2(x,t) = xe^t + e^{xt}$ est injective (étant strictement croissante).
4. Il est apparent que $\varphi_1(x,y) > 0$ et $\varphi_2(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in U$, d'où $\varphi(U) \subset V$. On prouve égalité : soit $(u,v) \in V$. On cherche $(x,y) \in U$ tel que $\varphi(x,y) = (u,v)$. Il faut alors $\ln(1+x) = u$, ce qui détermine $x = e^u - 1 > 0$ (car $u > 0$). Il faut ensuite $y \in \mathbb{R}$ tel que $xe^y + e^{xy} = v > 0$. Ce y existe parce que la fonction continue $t \mapsto xe^t + e^{xt}$ tend vers 0 quand $t \to -\infty$, et vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$ (théorème des valeurs intermédiaires).
5. (définition du cours)
6. On sait par (3)(4) que φ est bijective entre les deux ouverts U et V, et de classe C^1. Pour déduire que la fonction φ^{-1} est de classe C^1, il suffit d'appliquer le théorème d'inversion globale. Pour cela, on vérifie que le déterminant jacobien est non nul en tout point (x,y) de U. On trouve qu'il vaut $\dfrac{xe^y + xe^{xy}}{1+x} > 0$.

Exer. 4

1. Pour $|x| < 1$ on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. On a aussi $f_n(1) = 0\ \forall n$, donc la suite converge simplement sur $]-1,1]$ vers $f \equiv 0$.
2. $f_n(-1) = (-1)^n - 1 \implies$ la suite numérique $(f_n(-1))$ ne converge pas, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger simplement sur $[-1,1]$.
3. Pour $x \in]0,1[$ on a $x^n > x^{2n} \implies f_n(x) > 0$. On a aussi $f_n(0) = f_n(1) = 0$, donc f_n (dérivable) atteint un max en un point x_n par rapport à $]0,1[$. Or $f_n'(x_n) = 0 \implies x_n^n = \frac{1}{2} \implies f_n(x_n) = x_n^n - x_n^{2n} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Il suit que $\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]}$ ne tend pas vers 0 : la convergence n'est pas uniforme.
4. Si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers f', on en déduirait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (par un théorème du cours), ce qui n'est pas le cas.
5. Pour tout $x \in [0,a]$ on a $|f_n(x)| = |x^n - x^{2n}| = x^n(1 - x^n) \le a^n$. Il vient $\|f_n\|_{\infty,[0,a]} \le a^n \to 0$, d'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f = 0$ sur $[0,a]$.