

Math L2 / Unité d'enseignement « Analyse III »

devoir surveillé DS2 / mercredi 29 novembre 2017 / durée 30 minutes

Les documents de toute nature, les calculatrices, les téléphones ne sont pas autorisés.

1. (12 points) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ le quadrant ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, et soit f la fonction définie sur U par la règle

$$f(x, y) = \frac{8}{x} - 4y + x^2 - 2xy + 4y^2.$$

Il est clair que f est de classe C^∞ sur U (admis).

- (a) Calculer (sans se tromper) $\nabla f(x, y)$ et $\nabla^2 f(x, y)$ en un point $(x, y) \in U$.
- (b) Que vaut, approximativement à l'ordre un, $f(1+h, 3+k)$ quand (h, k) est petit ?
- (c) Déterminer le DL d'ordre deux de f autour du point $(1, 3)$.
- (d) Prouver que f atteint un minimum global par rapport à U au point $(2, 1)$.

2. (8 points) On considère le problème de minimiser la fonction $x - y^3 + xz$ sous la contrainte $x^2 + xy + 2y^2 + z^4 = 5$.

- (a) La règle du multiplicateur (il est admis qu'elle s'applique) donne un certain système de quatre équations en quatre inconnues qui mènera en principe à la solution du problème. Ecrire ce système. (Il s'agit seulement de l'écriture, rien d'autre ; ne pas chercher à justifier ni résoudre.)
- (b) Dédire à l'aide du système trouvé qu'une solution (x, y, z) du problème ne peut pas avoir $z = 0$.