Analyse III / DS1 du 18 octobre 2017 / corrigé rapide (mots clés, points essentiels)

1(a) f continue, négative sur $[0,+\infty[$; $f \sim_\infty -\dfrac{1}{2x} \implies$ intégrale diverge (Riemann $p=1$). Pour obtenir l'équivalence on fait le DL

$$f(x) = x\{1-\left(1+1/x^2\right)^{1/2}\} = x\left\{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} = -\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

ou bien on écrit $f(x) = \dfrac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ (en multipliant en haut et en bas par $x+\sqrt{1+x^2}$).

1(b) f continue et >0 sur $]0,1]$; $\sqrt{1+x}-1 \sim_0 \frac{x}{2} \implies f \sim_0 \frac{2}{\sqrt{x}} \implies$ convergence (Riemann $p=1/2$).

2.

(a) $u_n > 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n} \implies \sum u_n$ diverge (harmonique).

(b) $|u_n| = \dfrac{1}{n-\sqrt{n}}$ décroit vers 0, car $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$ est décroissante (puisque $g'(x) = -(x-\sqrt{x})^{-2}(1-1/(2x)) < 0$ pour $x>1$). Donc convergence (théorème des séries alternées). Mais $|u_n| \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument, d'où : semi-convergence.

(c) u_n positif, $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ (par DL) $\implies$ convergence (absolue) par Riemann.

(d) $|u_n| \leq \frac{2^n}{n!}$, qui converge par d'Alembert. Donc $\sum u_n$ converge absolument.

(e) $n^2 e^{-\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (croissance comparée) $\implies e^{-\sqrt{n}} \leq 1/n^2$ à partir d'un certain rang $\implies \sum u_n$ converge (absolument) par comparaison (Riemann $p=2$).

(f) On a $\sqrt{\ln n} < \ln n$ pour n grand, d'où $e^{-\sqrt{\ln n}} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n} \implies \sum u_n$ diverge (comparaison, série harmonique).