Université Claude Bernard Lyon 1
Math L2 ≪ Fonctions de plusieurs variables ≫
Examen : mercredi 10 janvier 2018 : durée 2h00

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considérée comme une tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur une feuille imprimée recto-verso.

Ainsi que votre nom et votre numéro d'étudiant, identifier sur votre copie (en haut, très lisible) votre Parcours (c'est soit Math-Info, soit Cursus Préparatoire).

Attention : Il s'agit de traiter les exercices 1, 2, 3, 4, 5 et <u>un seul</u> (au choix) des exercices 6 ou 7.

1. (2 pts) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{x^2+8x+20}$

2. (3 pts) Déterminer *toutes* les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que la série $\displaystyle\sum \frac{(x-3)^n}{2^n(1+\sqrt{n})}$ converge.

3. (2 pts) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,3) = 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) = -5.$$

On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(x^2+xy, 3y)$. Justifier l'existence puis calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1)$.

4. (3 pts) On s'intéresse au calcul de l'intégrale double $I := \displaystyle\iint_D x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\, x^2+y^2 \le 9\}.$$

(a) Dessiner rapidement le domaine D.

(b) Calculer I.

5. (3 pts) On considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définies par

$$f_n(x) \;=\; (\sin x)^n + x\,e^{x/n}.$$

(a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,2]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

(b) Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,2]$.

(c) Soit $a \in]0,1[$. Prouver que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

SOIT

6. (7 points)

(a) Autour du point $(1,2,-4)$, la surface de niveau $\mathcal{S}$ définie par

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz + \sin(\pi z) + 8 = 0\}$$

détermine z implicitement en fonction de (x,y). Calculer $\dfrac{\partial}{\partial x} z(1,2)$.

(b) Prouver que $x^4 - 7x + 3e^{x-y} + y^2 + y + 1 \geqslant 0 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
[Indication : on a égalité en $(1,1)$.]

(c) Trouver la fonction x_* qui minimise $J(x) := \displaystyle\int_0^1 \left\{ x'(t)^2 + 2t^2 x(t) + x(t)^2 \right\} dt$ par rapport à toutes les fonctions $x \in C^2[0,1]$ telles que $x(0) = 0,\ x(1) = 1$.

OU

7. (7 points) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $a > 0$. Montrer que l'application $\varphi_a :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\varphi_a(t) = \dfrac{1-e^{-at^2}}{t^2}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer $F'(x)$ pour tout $x > 0$ sans intégrale. On donne la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Déduire des deux questions précédentes une expression explicite (sans intégrale) de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.