Math L2 / Unité d'enseignement « Fonctions de plusieurs variables »

Examen partiel / mercredi 15 novembre 2017 / Durée 1h30

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature, de calculettes, et de téléphones n'est pas autorisée.

1. (3 points)

(a) Soit U une partie dans $\mathbb{R}^n$. Définir ce que veut dire la phrase « l'ensemble U est convexe » .

(b) Soient U et V deux parties convexes dans $\mathbb{R}^n$. Prouver que $U \cap V$ est convexe.

2. (3 points) Étudier l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \ln\left(1+xe^{-x}\right) dx$.

3. (3 points) On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-10) r^n$, où r est un paramètre réel.

(a) Pour quelles valeurs positives de r la série converge-t-elle ?

(b) Pour quelles valeurs négatives de r la série converge-t-elle ?

4. (5 points) On pose $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$ et on définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par la règle

$$f(x,y) = xy\left(x^2+y-1\right).$$

(a) Prouver que f atteint un minimum par rapport à A.

(b) Montrer que le minimum de f sur A n'est *pas* atteint dans la frontière de A.

(c) Trouver les points dans A où $\min_A f$ est atteint (justifier la conclusion).

5. (3 points) Soit $\mathcal{S}$ la surface de niveau dans $\mathbb{R}^3$ engendrée par l'équation $xy+z^2=3$. Confirmer que le point $P := (1,2,1)$ appartient à $\mathcal{S}$, et trouver l'équation du plan tangent et de la droite normale à la surface $\mathcal{S}$ au point P.

6. (3 points)

(a) Sachant que la fonction $(x,y) \mapsto g(x,y) := x^2 - x + y^2 + 4y + xy + 1$ admet un minimum global (on l'admet), en quel point ce minimum est-il atteint ?

(b) Soit z une fonction continûment dérivable de x et y définie par la relation $z^3 - xyz + 3x^2 + y = 10$ et $z(1,1) = 2$. Calculer $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$.

(c) Soit $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui satisfait $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(1,2) = -1$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}(1,2) = 3$. On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h(t) := \theta(t^2, 3t-1)$. Calculer $h'(1)$.

Analyse III / partiel du 15 novembre 2017 / corrigé rapide

1 (a) U est convexe ssi : $x, y \in U, t \in [0,1] \implies (1-t)x + ty \in U$.

(b) Soient $x, y \in U \cap V$ et $t \in [0,1]$; on veut prouver que le point $z := (1-t)x + ty$ est dans $U \cap V$. Mais U convexe $\implies z \in U$ (par définition de partie convexe) et de même V convexe $\implies z \in V$, d'où l'appartenance de z à $U \cap V$.

2. La fonction $f(x) = x^3 \ln(1 + xe^{-x})$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$. De plus on a $f(x) \sim_{+\infty} x^4 e^{-x}$, en considérant le DL de $\ln(1+t)$ en $t = 0$. Afin de déduire par le théorème d'équivalence que notre intégrale converge, il suffit alors de savoir que l'intégrale sur $[0, +\infty[$ de $x^4 e^{-x}$ converge. Ceci est clair par comparaison, car on sait que l'intégrale de $e^{-x/2}$ converge, et on a, pour une certaine constante M, $x^4 e^{-x} \leq M e^{-x/2}$ $\forall x \geq 0$ (ou, pour le dire autrement, on a $x^4 e^{-x} = O_\infty(e^{-x/2})$), ce qui suit de la croissance comparée.

3. La série est positive (à partir du rang 10) quand $r \geq 0$, donc la règle de d'Alembert s'applique. Elle donne convergence pour $r < 1$, divergence pour $r > 1$. Pour $r = 1$ on a visiblement divergence grossière. La cas $r < 0$: divergence grossière évidente pour $r \leq -1$; pour $-1 < r < 0$, la série converge absolument (prouvé ci-dessus, en prenant $|r|$ à la place de r), donc elle converge.

4. (Variante de l'exemple p. 29-30, CM4.)

(a) f est continue (car un polynôme), A non vide et compact (car fermé et borné) $\implies \min_A f$ atteint (théorème de Weierstrass).

(b) Il y a des points dans A où $f < 0$, par exemple, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; donc $\min_A f < 0$. On voit facilement (étudier chacun des quatre côtés) que $f \geq 0$ sur ∂A ; en conséquent, $\min_A f$ ne peut pas être atteint dans ∂A.

(c) On calcul ∇f pour déduire qu'un point critique dans $\operatorname{int} A$ satisfait $3x^2 + y = 1$ et $x^2 + 2y = 1$ $\implies 5x^2 = 1 \implies x = 1\sqrt{5} \implies (x,y) = (1/\sqrt{5}, 2/5)$. Puisque ceci est le seul point critique dans $\operatorname{int} A$, et puisque $\min_A f$ est forcément atteint en un point critique dans $\operatorname{int} A$ (à cause de (b)), ce point est l'unique solution du problème de minimisation.

5. (C'est l'exemple p. 10, CM6.) $\mathcal{S}$ est un ensemble de niveau de la fonction $f(x,y) = xy + z^2$. On calcule $\nabla f(1,2,1) = (2,1,2)$. Le plan tangent passe par $(1,2,1)$ et admet ce vecteur comme direction normale. Il s'agit alors du plan décrit par

$$[(x,y,z) - (1,2,1)] \bullet (2,1,2) = 0 \longleftrightarrow 2x + y + 2z = 6.$$

La droite normale passe par $(1,2,1)$, elle est parallèle au gradient. Elle est donc donnée en forme paramétrique par

$$(x,y,z) = (1,2,1) + t(2,1,2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

6.

(a) Au point (x,y) donnant le minimum, on a (par la règle de Fermat) $g_x(x,y) = 0$ et $g_y(x,y) = 0$ $\implies (x,y) = (2,-3)$.

(b) $-4/11$ (voir p. 8, CM5).

(c) Règle de la chaîne : $h'(t) = \theta_x(t^2, 3t-1) \times 2t + \theta_y(t^2, 3t-1) \times 3 \implies h'(1) = 7$.