Math Analyse III automne 2017 Cours de Francis Clarke

Feuille 5 : Suites, séries, et intégrales dépendant d'un paramètre

Suites

Exer. 5.1 Soit U une partie convexe dans $\mathbb{R}^m$, et soient $f_n : U \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions qui sont convexes sur U. Prouver que si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f sur U, alors f est convexe (c-à-d, la convergence simple préserve la convexité).

Exer. 5.2 On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$ pour $x \in [0,1]$.

(a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

(b) Définir soigneusement ce que veut dire la phrase générique suivante :

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a,b]$.

(c) Est-ce que la convergence de la suite (f_n) ci-dessus vers f est uniforme sur $[0,1]$?

Exer. 5.3 On pose $f_n(x) = \dfrac{nx}{ne^{x^2}+\cos x}$ pour $x \in [0,1]$.

(a) Trouver la fonction f qui est la limite simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

(b) Est-ce que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $[0,1]$?

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ en citant le résultat du cours qui le permet.

Exer. 5.4 On considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) définies par $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Est-ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[-1,1]$?
3. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$. (Indication : montrer que f_n est positive sur $]0,1[$, et trouver où elle atteint son maximum.)
4. En vue de la partie (3), pourquoi peut-on dire, sans même le vérifier directement, que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f' sur $[0,1]$?
5. Soit $a \in]0,1[$. Prouver que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Séries

Exer. 5.5 Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les séries suivantes convergent-elles ?

(a) $\sum \dfrac{x^{n-1}}{n3^n}$ (b) $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (c) $\sum n!(x-1)^n$ (d) $\sum \dfrac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

Exer. 5.6 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ dont les termes sont non nuls et satisfont

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0.$$

(a) Prouver que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge. On note $S(x)$ sa somme.

(b) Définir soigneusement ce que veut dire la phrase générique suivante :

La série de fonctions $\sum u_n(x)$ *converge normalement sur l'intervalle* $[a,b]$.

(c) Prouver que la fonction S de la partie (a) est continue. (Indication : prouver la convergence normale sur chaque intervalle de la forme $[-r,r]$ (où $r>0$), et invoquer un théorème du cours.)

(d) Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\,a_n x^{n-1}$ converge pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

(e) Prouver que $S(\cdot)$ est continûment dérivable, et que l'on a

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 1} n\,a_n x^{n-1}.$$

(f) On considère maintenant le cas où $a_n = \dfrac{1}{n!}$. On observe alors que $S(0) = 1$. Déduire de la partie (e) que $S' = S$. Quelle est la notation usuelle pour la fonction $S(x)$ dans ce cas ?

Intégrales

Exer. 5.7 (a) On sait que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^p}$ converge lorsque le paramètre p satisfait $p > 1$. En déduire la convergence des deux intégrales impropres suivantes :

$$J = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3}, \quad K = \int_0^\infty \frac{t}{1+t^3}\,dt.$$

(b) Invoquer un théorème du cours afin de prouver que la fonction I donnée par la règle

$$I(x) := \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^3+x^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. (Indication : convergence normale.)

(c) Prouver que la fonction $I(\cdot)$ est dérivable.

Exer. 5.8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue. La *transformée de Laplace* de f veut dire la fonction F définie sur l'intervalle ouvert $U :=]0,\infty[$ comme suit :

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt, \quad x \in U.$$

(a) Prouver que la fonction F est bien définie et continue sur U.

(b) Prouver que F appartient à $C^1(U)$, et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty -t\,e^{-xt} f(t)\,dt$ (c-à-d, on peut dériver sous le signe intégrale).

Calcul des variations

Exer. 5.9 (a) Définir soigneusement le problème de base en calcul des variations, qui est noté (P).

(b) Dans un cas particulier de (P), le lagrangien est donné par

$$L(t,x,v) = e^{-3t}(v^2 - 2x^2).$$

Expliciter l'équation d'Euler (formes initiale et développée), et trouver sa solution générale.

Exer. 5.10 On s'intéresse au problème de base suivant en calcul des variations :

$$\text{minimiser } \int_0^1 [1 + x(t)]x'(t)^2 dt \ \text{ s.l.c. } x(0) = 0, x(1) = 3, x(\cdot) \in C^2[0,1].$$

(a) Écrire l'équation d'Euler pour ce cas particulier du problème de base.

(b) Trouver une extrémale admissible de la forme $x(t) = (ct+1)^r - 1$, où c et r sont des constantes positives.

Exer. 5.11 On considère le problème

$$\text{minimiser } \int_1^3 \left\{ t\left(x'(t)\right)^2 - x(t) \right\} dt \ : x \in C^2[1,3],\ x(1) = 0,\ x(3) = -1.$$

(a) Ecrire l'équation d'Euler dans ses formes initiale et développée, et identifier l'unique extrémale admissible x_*.

(b) Prouver que x_* correspond à un minimum global.

Exer. 5.12 Trouver la fonction x_* qui minimise $J(x) := \int_0^1 \left\{ x'(t)^2 + 2t^2 x(t) + x(t)^2 \right\} dt$ par rapport à toutes les fonctions $x \in C^2[0,1]$ telles que $x(0) = 0,\ x(1) = 1$.