Corrigé :

1. On montre que la fonction intégrée $f(x)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
Ensuite on observe $\ln x \leq M x^{1/2}$ (croissance comparée).
On en déduit $f(x) \leq M x^{1/2}/x^2 = M x^{-3/2}$.
Il suit par comparaison (intégrale de Riemann convergente) que l'intégrale est convergente (que f est intégrable sur $[1,+\infty[$).

2. On trouve $\lim \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x-3|/2$.
Par le critère de d'Alembert, on déduit que $\sum |u_n|$ (et donc $\sum u_n$) converge pour $x \in]1,5[$.
Pour $|x-3| > 2$, on voit que $|u_n|$ ne tend pas vers 0, d'où la divergence grossière de $\sum u_n$.
Pour $x = 5$, le terme général de la série devient $1/(1+\sqrt{n})$, diverge par équivalence avec une série de Riemann connue.
Pour $x = 1$, le théorème des séries alternées s'applique, car $n \mapsto 1/(1+\sqrt{n})$ est décroissant, d'où convergence.
Réponse : $x \in [1,5[$.

3. Posons $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x^2+xy, 3y)$ de sorte que $g = f \circ \varphi$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque ses fonctions coordonnées (notées φ_1 et φ_2) sont polynomiales. Par le théorème de composition, la fonction $g = f \circ \varphi$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ce qui justifie l'existence de ses dérivées partielles, et en particulier de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1)$. Pour les calculer, on peut utiliser la formule de dérivation en chaîne ou les matrices jacobiennes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,1) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) \times (2 \times 0 + 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \times 0 \\
&= 3
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0,1) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) \times 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \times 3 \\
&= -15.
\end{aligned}$$

4.

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^3 r^3 \cos^2\theta \, dr \, d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta$$
$$= \frac{81}{8} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta = \frac{81}{32}(\pi + 2).$$

5.

(a) On trouve $f(x) = x$, sauf que $f(\pi/2) = \pi/2 + 1$.
(b) Puisque les f_n sont continues sur $[0,2]$, mais pas f, la convergence ne peut être uniforme.

$$\text{(c) } \|f_n - f\|_{\infty,[0,a]} = \sup \left|(\sin x)^n + x\left(e^{x/n} - 1\right)\right| \leq (\sin a)^n + a\left(e^{a/n} - 1\right) \to 0,$$

d'où la conclusion.

6.

(a) $yz + xyz_x + \pi\cos(\pi z)z_x = 0 \implies z_x(1,2) = 8/(2+\pi)$.

(b) La fonction g à gauche est convexe et $(1,1)$ est un point critique de g $\implies g(x,y) \geq g(1,1) = 0\,\forall(x,y)$.

(c) L'équation d'Euler mène à l'unique extrémale $x_*(t) = -t^2 - 2 + ce^t + de^{-t}$, où $c + d = 2$, $ce + d/e = 4$; c'est un min global car le lagrangien $L(t,x,v) = v^2 + 2t^2x + x^2$ est convexe en (x,v).

7.

1. La fonction φ_a est continue, positive sur $]0;+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0;+\infty[$. De plus, lorsque $t \to 0^+$, on a $\varphi_a(t) = \dfrac{1 - 1 + at^2 + o(t^2)}{t^2} = a + o(1) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} a$. Ainsi, φ_a se prolonge par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0;1]$. Enfin, on a $0 \leq \varphi_a(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$ avec $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1;+\infty[$, donc par comparaison de fonctions positives, φ_a est intégrable sur $[1;+\infty[$ et ainsi sur $]0;+\infty[$.

2. Posons $f : \mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \dfrac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}$.

- f est continue, même de classe $\mathscr{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$ comme quotient de la composée de $u \longmapsto 1 - e^u$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec la fonction polynomiale $(x,t) \longmapsto -xt^2$, et de la fonction polynomiale $(x,t) \longmapsto t^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$.
- Soit $a > 0$. Soit $(x,t) \in [0;a] \times]0;+\infty[$, on a

$$|f(x,t)| = \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} \leq \frac{1 - e^{-at^2}}{t^2} = \varphi_a(t)$$

car la fonction $u \longmapsto 1 - e^{-ut^2}$ est croissante. Comme $\varphi_a :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ est indépendante de x et intégrable sur $]0;+\infty[$ d'après la première question, on peut appliquer le théorème de continuité par domination : la restriction de F à $[0;a]$ est (bien définie et) continue sur $[0;a]$, ceci pour tout $a > 0$, donc F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. On a déjà vérifié les deux premières hypothèses du théorème de dérivation par domination.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$, donc elle admet une dérivée partielle par rapport ‡ x, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$.

- Soit $0 < b < a$. Pour tout $(x,t) \in [b;a] \times]0;+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2 e^{-xt^2}}{t^2}\right| = e^{-xt^2} \leq e^{-bt^2} := \psi(t)$$

  La fonction $\psi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0;1]$, et par croissances comparées, elle est négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$, donc elle est intégrable sur $[1;+\infty[$ et ainsi sur $]0;+\infty[$.

Par le théorème de dérivation, on en déduit que la restriction de F à $[b;a]$ est de classe $\mathscr{C}^1$, ceci pour tous $0 < b < a$, donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x}t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{par changement de variable } u = \sqrt{x}t \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

4. Puisque F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = \sqrt{\pi x} + \lambda$. Or par continuité de F en 0, on a d'une part $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = 0$ et d'autre part $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0 + \lambda$ donc $\lambda = 0$ par unicité de la limite. Ainsi, $F(x) = \sqrt{\pi x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.