Analyse III
Fonctions de plusieurs variables

MAT2019L séquence 4

CM9

automne 2017

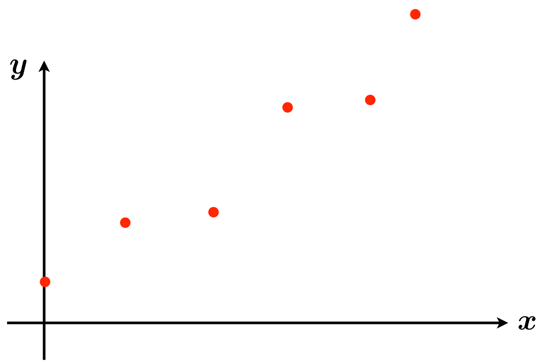
cours de
Francis Clarke

Un exemple en optimisation: Moindre carrés

Soit (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, N)$ des points donnés dans le plan, où $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$. On a des raisons à penser que les valeurs y_i sont liées aux valeurs x_i par une fonction affine:

$$y_i \;=\; m\,x_i + k \;(i = 1, 2, \ldots, N),$$

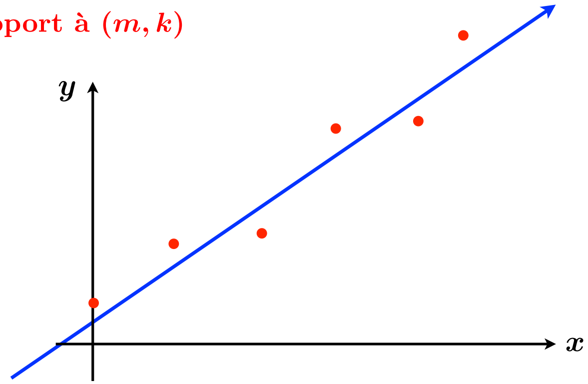
mais l'erreur expérimentale exclue normalement que cela soit précisément vrai.



La *méthode des moindres carrés* produit ce que l'on considère la "meilleure" approximation affine de nos données. Il s'agit de trouver m et k qui minimisent la somme des carrés des erreurs; c-à-d qui minimisent la fonction

$$f(m,k) := \sum_{i=1}^{N} |y_i - m\,x_i - k|^2.$$

f est strictement convexe par rapport à (m,k)



Le rôle de la convexité en optimisation

Proposition Soit U un convexe ouvert, et soit f une fonction convexe et dérivable sur U. On se donne $x_* \in U$. Alors

$$f \text{ atteint un minimum local en } x_*$$
$$\Updownarrow$$
$$f \text{ atteint un minimum global en } x_* \text{ (par rapport à } U)$$
$$\Updownarrow$$
$$\nabla f(x_*) = 0$$

(et si f est strictement convexe, le min est unique)

Proposition Soit U un convexe ouvert, et soit f une fonction convexe et dérivable sur U. On se donne $x_* \in U$. Alors

$$f \text{ atteint un minimum local en } x_*$$
$$\Updownarrow$$
$$f \text{ atteint un minimum global en } x_* \text{ (par rapport à } U\text{)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\nabla f(x_*) = 0$$

(et si f est strictement convexe, le min est unique)

(P) $\min_A f$

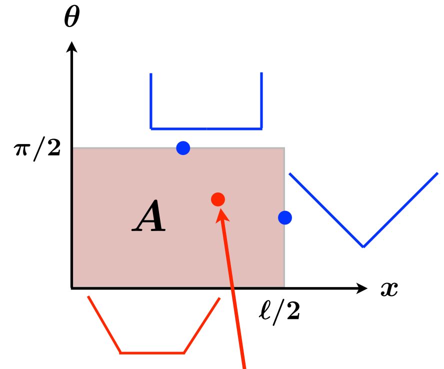
Corollaire Si f est convexe sur un ouvert convexe U qui contient A, et si $\nabla f(x_*) = 0$ pour un point $x_* \in A$, alors x_* est solution du problème $\min_A f$.

(x_* est l'unique solution si f est *strictement* convexe)

Rq :

Dans la recherche d'un minimum global, la caractérisation locale d'un point critique n'est pas pertinente en générale

Rappel : le caniveau $\quad f(x,\theta) = x\sin\theta[\ell - 2x + x\cos\theta]$



On cherche à maximiser f (qui n'est pas concave) sur A

le gagnant... c'est un max local bien sûr, mais cela n'importe pas

Corollaire Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui est localement C^2 autour d'un point x_* où

$$\nabla f(x_*) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x_*) > 0.$$

Alors x_* correspond à un minimum local.

Démonstration Il existe une boule $U := B^\circ(x_*, r)$ autour de x_* dans laquelle $\nabla^2 f > 0$.

Donc f est strictement convexe sur U.

Mais $\nabla f(x_*) = 0$.

Donc f atteint en x_* un minimum par rapport à U (c-à-d, un minimum local) par la Proposition. ∎

Rq : Il s'agit en fait d'un minimum local *stricte* sur U (c-à-d, atteint uniquement en x_*), car f est *strictement convexe* sur U.

En optimisation, la fonction coût est parfois convexe (exemple: méthode des moindre carrés) et parfois pas (exemple: le caniveau, où la fonction à maximiser n'est pas concave).

La convexité est très présente dans certaines applications modernes (finances, gestion, éco, jeux, stats).

Il convient d'apprécier son rôle en optimisation.

les cas de figure d'un problème type

un problème type

On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).

Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.

Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0, 0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

Exemple 1 :
$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3$

$f(0, 0) = -3$

On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).

Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.

Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0, 0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ 4y + 4 \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0, 0) = \begin{bmatrix} -4 \\ +4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Il suit que f n'a même pas un minimum local en $(0, 0)$ (par la règle de Fermat, *condition nécessaire*). Encore moins le minimum par rapport à A.

Affirmation réfutée

Rq: On aurait pu aussi faire état du point $(1, -1)$, où $f = -8$.

Exemple 2 :

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ $f(0,0) = 4$

> On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé
>
> $$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}.$$
>
> On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).
>
> Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.
>
> Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2+3y^2-6x \\ 6xy-6y \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On calcule ensuite

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Il suit que f n'a même pas un minimum local en $(0,0)$, par la *condition nécessaire* $\nabla^2 f(0,0) \ge 0$ (sdp).

Encore moins le minimum par rapport à A.

Rq: $f(-1,-1) = -6$.

Affirmation réfutée

Exemple 3 :

$f(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + xy + 4$ $f(0,0) = 4$

> On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé
>
> $$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}.$$
>
> On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).
>
> Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.
>
> Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} x^4+2xy^3+18x+y \\ 3x^2y^2+16y+x \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On calcule ensuite

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3+2y^3+18 & 6xy^2+1 \\ 6xy^2+1 & 6x^2y+16 \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} > 0$ ($\Longrightarrow$ sdp).

On en déduit qu'un min local existe en $(0,0)$. Mais il n'est certainement pas global par rapport à $\mathbb{R}^2$, puisque

$$\lim_{y\to-\infty} f(1,y) = \lim_{y\to-\infty} y^3+8y^2+y+\frac{66}{5} = -\infty.$$

Exemple 3 (suite et fin) :

$f(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + xy + 4$

On a déduit qu'un min local existe en $(0,0)$. Mais il n'est pas global par rapport à $\mathbb{R}^2$.

Peut-on prouver qu'il s'agit d'un min par rapport à A ?

On a calculé

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3+2y^3+18 & 6xy^2+1 \\ 6xy^2+1 & 6x^2y+16 \end{bmatrix}.$$

Lorsque $(x,y) \in A$, les éléments sur la diagonale valent au moins 12 et 10. Il suit que

$$\operatorname{tr} \nabla^2 f(x,y) \ge 22 \text{ et dét } \nabla^2 f(x,y) \ge 12\times10-7\times7 = 71.$$

On en déduit $\nabla^2 f(x,y) > 0$ (dp) pour $(x,y) \in A$, ce qui implique que f est (strictement) convexe sur A. Alors le point critique $(0,0)$ correspond à un min global par rapport à A (et unique).

Affirmation confirmée

Exemple 4 :

$f(x,y) = (x+1)^3 - 3(x+1)e^y + e^{3y}$ $f(0,0) = -1$

> On s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par rapport au pavé
>
> $$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}.$$
>
> On donne que f est dans $C^2(\mathbb{R}^2)$; f est donc continue sur A, qui est compact (car fermé et borné).
>
> Par le théorème de Weierstrass, f atteint un minimum sur A.
>
> Il est affirmé que le minimum est atteint à l'origine $(0,0)$. Prouver ou réfuter cette affirmation.

On calcule

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3(x+1)^2 - 3e^y \\ -3(x+1)e^y + 3e^{3y} \end{bmatrix},$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On calcule ensuite

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6(x+1) & -3e^y \\ -3e^y & -3(x+1)e^y + 9e^{3y} \end{bmatrix}$$

d'où $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} > 0$ ($\Longrightarrow$ sdp).

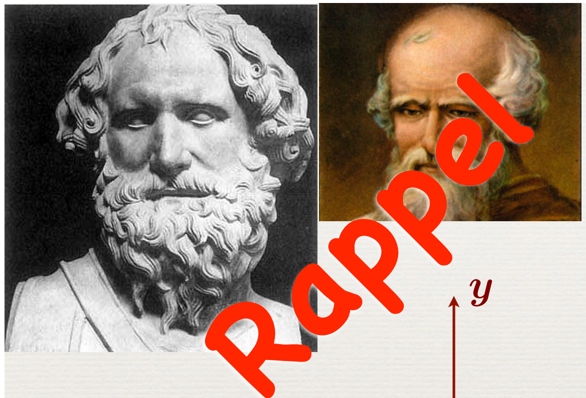
on peut ainsi confirmer l'affirmation

Il est clair que la matrice hessienne n'est pas sdp lorsque $x = -1$ (par exemple), son déterminant étant négatif. Donc f n'est pas convexe sur A (hélas). Comment procéder ?

Il faut trouver les autres candidats (dans l'intérieur, et sur la frontière) et les comparer à $(0,0)$... c-à-d, appliquer la méthode déductive.

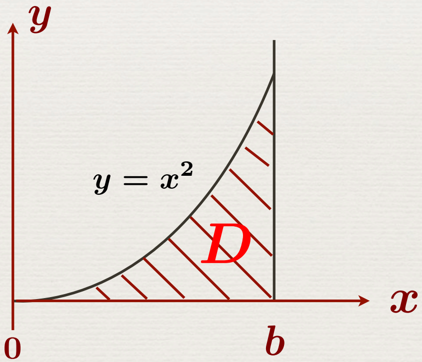
prochain sujet :

l'intégration des fonctions de plusieurs variables



Archimède (3 siècles av. J-C)

Problème : calculer l'aire sous la parabole



On connait l'aire d'un rectangle

$$\text{Aire} = cd$$

La **méthode d'exhaustion** de Archimède consiste à approximer le domaine D par une collection de rectangles.

Pour cela, on introduit la notion de **subdivision** d'un intervalle

Soit $N \in \mathbb{N}_*$. On considère la **subdivision uniforme**

$$\left(0,\ \frac{b}{N},\ 2\frac{b}{N}, \ldots,\ (N-1)\frac{b}{N},\ b\right)$$

de l'intervalle $[0, b]$, qui est de **pas** b/N. On note par

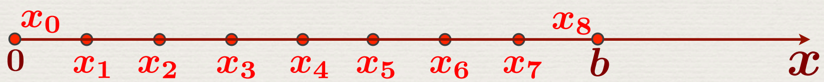
$$x_i := i\,\frac{b}{N} \quad (i = 0, 1, \ldots, N)$$

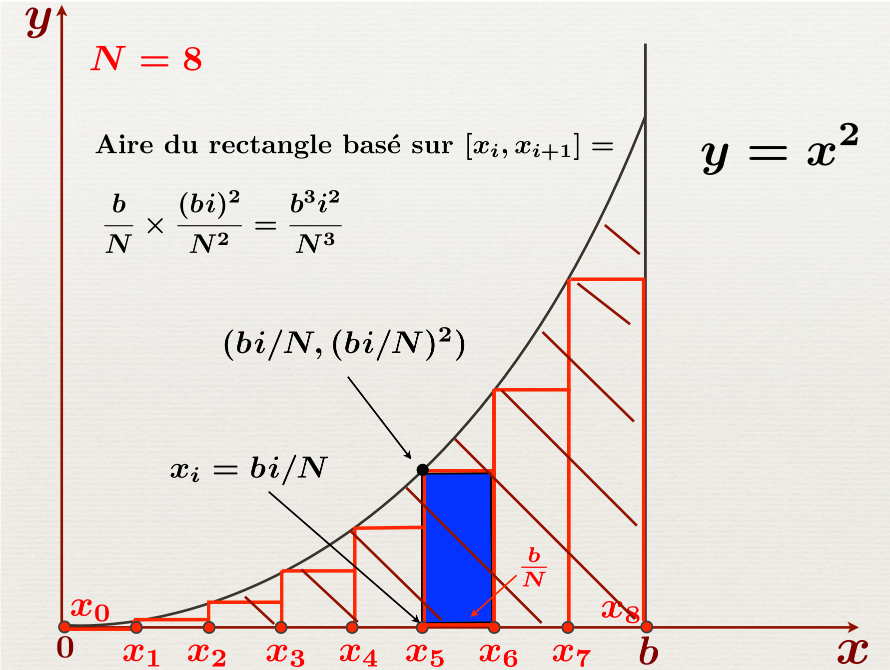
les **nœuds** de la subdivision. Donc $x_0 = 0$ et $x_N = b$.
On note aussi

$$I_i := [x_i, x_{i+1}] = \left[i\,\frac{b}{N}, (i+1)\,\frac{b}{N}\right]$$

les N sous-intervalles de la subdivision.

$N = 8$





Aire du rectangle basé sur $[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{b}{N} \times \dfrac{(bi)^2}{N^2} = \dfrac{b^3 i^2}{N^3}$

En invoquant la formule *somme des carrés*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \tfrac{1}{6}\, k(k+1)(2k+1)$$

pour $k = N - 1$, on trouve que l'aire total des rectangles vaut

$$\begin{aligned} &\frac{b^3}{N^3}\left\{1^2 + 2^2 + \cdots + (N-1)^2\right\} \\ &= \frac{b^3}{N^3}\frac{1}{6}(N-1)N(2N-2+1) \\ &= \frac{b^3}{6N^2}(N-1)(2N-1). \end{aligned}$$

Quand N devient très grand, le découpage en rectangles est une bonne approximation de la région D qui nous intéresse.

Lorsque $N \to +\infty$, l'aire des rectangles $\Longrightarrow \dfrac{b^3}{3}.$

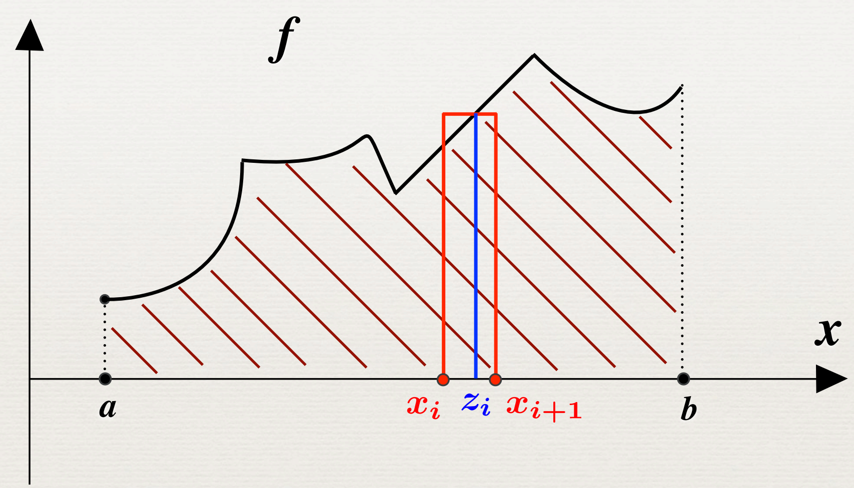
21 siècles plus tard :

Définition de l'intégrale

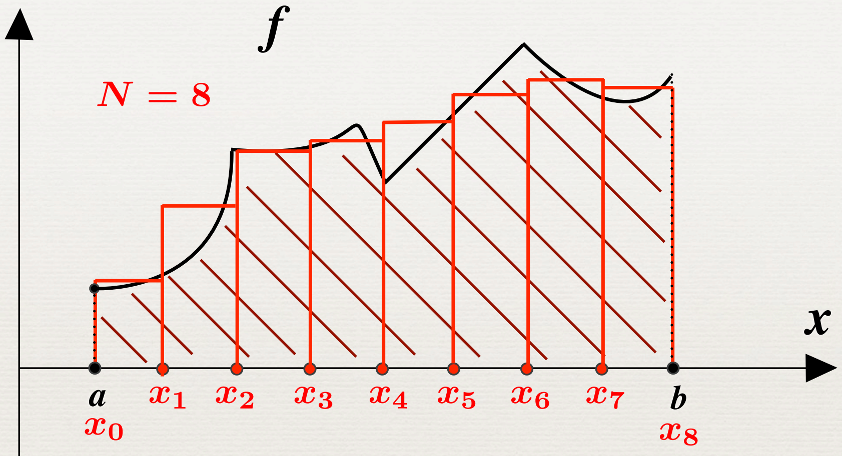
Soit f une fonction **positive** sur [a,b]. On veut que l'intégrale de f, notée

$$\mathrm{Int}[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

corresponde à l'aire de la région D comprise sous le graphe de f:



Aire du rectangle $= f(z_i)(x_{i+1} - x_i) = f(z_i)\frac{b-a}{N}$



On choisit ensuite un point z_i dans chaque I_i, et on pose

$$S_N := \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i)(x_{i+1} - x_i) \;=\; \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i)\frac{b-a}{N},$$

une *somme de Riemann.*

On a définit des sommes de Riemann

$$S_N := \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i)\frac{b-a}{N}.$$

Lorsque la suite S_N tend vers une limite finie ℓ, c-à-d quand $\lim_{N\to\infty} S_N = \ell$, et de façon qui ne dépend pas du choix des z_i, on dit que f est *intégrable*, et la valeur de son intégrale est ℓ ; on écrit alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \ell\,.$$

S ou Σ $\qquad$ $dx \approx x_{i+1} - x_i$

On insiste sur le fait que la limite ne doit pas dépendre du choix des z_i.

Rq: la définition usuel admet les subdivisions non uniforme ; nous les ignorons pour alléger.

Un point fondamental est le suivant: quand la définition de l'intégrale a-t-elle un sens ?

Il faut que la limite des sommes S_N existe, indépendamment du choix des z_i.

Pour quelles fonctions ?

Théorème. **(Riemann)**

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

C'est-à-dire, toute fonction continue est intégrable dans le sens de Riemann

(Il y a aussi les intégrales au sens de Lebesgue... à venir)

BERNHARD RIEMANN

1826-1866

Son nom ne figure pas sur la Tour Eiffel (mais Lebesgue, si)

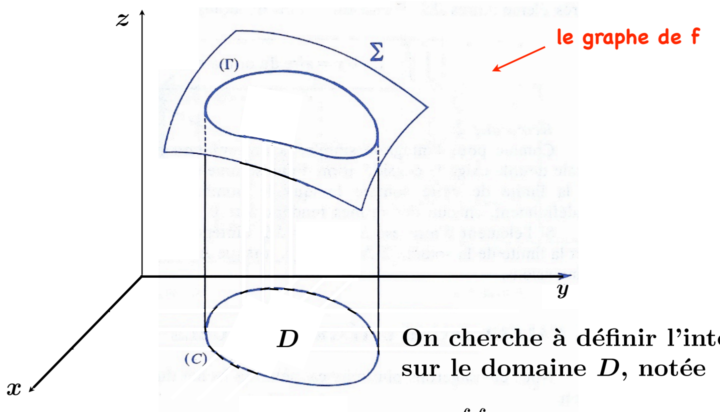
La définition même de l'intégrale est un élément clé, qui permet de développer nombreuses applications de l'intégration :

aire, distance parcourue, centre de gravité, longueur d'une courbe, aire et volume d'un solide de rotation...

Et beaucoup de calcul d'intégrales...

Maintenant : les intégrales doubles

$f(x, y)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, et on limite l'attention aux points (x, y) d'un domaine D limité par une courbe fermée C.

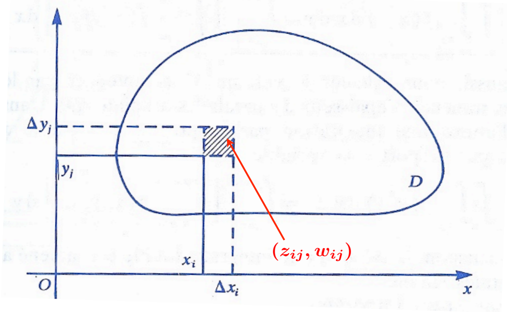


On cherche à définir l'intégrale de f sur le domaine D, notée

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ou} \quad \iint_D f\,dA$$

de telle façon à obtenir le volume du solide sous le graphe.

On introduit une subdivision x_i sur l'axe de x, ainsi qu'une subdivision y_j sur l'axe des y.

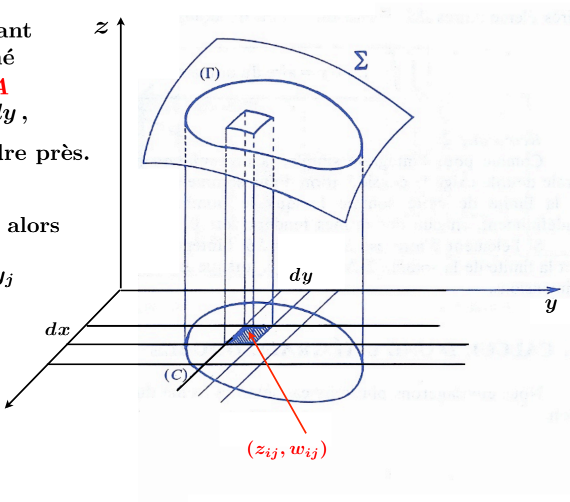


On aura alors une famille de pavés recouvrant D

Le volume dV correspondant au pavé concerné est donné par

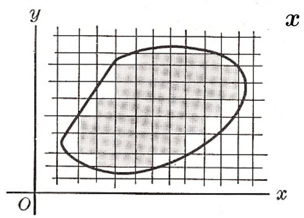
$$dV = f(x,y)\,\overset{dA}{dx\,dy},$$

à un terme de seconde ordre près.



La somme de Riemann est alors

$$\sum_{ij} f(z_{ij}, w_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$



On dit que f est intégrable lorsque ces sommes de Riemann tendent vers une limite, celle-ci ne dépendant pas des subdivisions et du choix des points dans les pavés.

Théorème. **(Riemann)**

Si f est continue sur D, alors f est intégrable sur D.

C'est-à-dire, toute fonction continue est intégrable dans le sens de Riemann

On écrit $\iint_D f\,dA$ pour l'intégrale de f sur D, et typiquement

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

dans le contexte des coordonnées cartésiennes (x,y).

Pour une fonction positive, l'intégrale correspond au volume du solide sous le graphe.

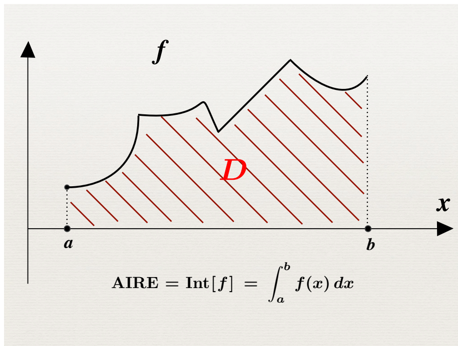
Rq : l'aire du domaine D correspond à

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \iint_D 1\,dA$$

$=$ volume du cylindre de base D et de hauteur 1

$=$ aire de $D \times 1$ $=$ aire de D

Il en résulte que certains calculs d'aire peuvent se faire de deux façons :



$$= \iint_D dA$$

Autre exemple d'application d'une intégrale double : le centre de gravité

Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$. On le considère comme une plaque homogène (une distribution de masse). Quel est son centre de gravité $\bar{x}$ par rapport à l'axe des x?

> **Théorème.** Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$. Le centre de gravité $\bar{x}$ de D par rapport à l'axe des x est donné par
>
> $$\bar{x} = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D x\,dA = \frac{\iint_D x\,dA}{\iint_D dA}$$

De même :

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D y\,dA = \frac{\iint_D y\,dA}{\iint_D dA}$$

propriétés de base de l'intégrale :

Proposition Soit D un domaine borné dans $\mathbb{R}^2$.

1. Si c et k sont des constantes, alors

$$\iint_D (cf + kg)\,dA = c\iint_D f\,dA + k\iint_D g\,dA$$

2. Si $m \leq f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in D$, alors

$$m\,\text{aire}(D) \leq \iint_D f\,dA \leq M\,\text{aire}(D)$$

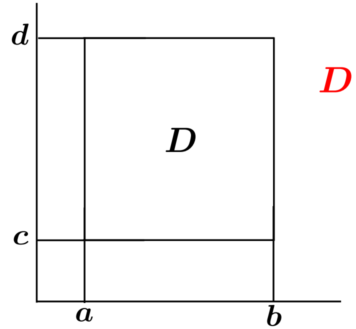
3. Si $f \leq g$ sur D, alors $\iint_D f\,dA \leq \iint_D g\,dA$.

4. Si D est découpé en deux domaines D_1 et D_2, alors

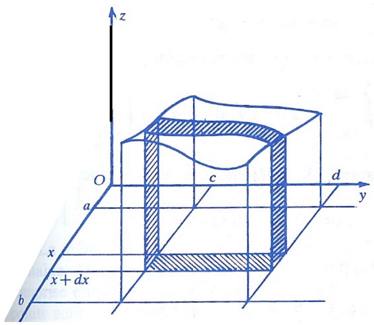
$$\iint_D f\,dA = \iint_{D_1} f\,dA + \iint_{D_2} f\,dA\,.$$

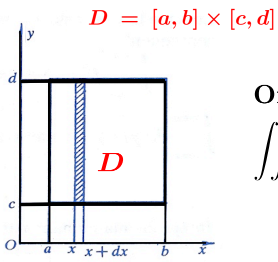
Comment calculer une intégrale double ?

On commence par le cas où **D est un pavé**, donc où la frontière de D est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées.



$$D = [a,b] \times [c,d]$$





On veut calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Le volume de la tranche entre x et $x+dx$

$=$ l'épaisseur $\times$ l'aire de la coupe transversale

$= dx \times \int_c^d f(x,y)\,dy$ (la variable x étant fixée).

Il faut intégrer cette fonction de x afin de trouver le volume total, pour x entre a et b.

On obtient que le volume total est donné par

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

De même on a $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$

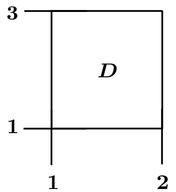
En conclusion, le calcul d'une intégrale double sur un pavé est ramené au calcul de deux intégrales simples :

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \;=\; \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \;=\; \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

Exemple :

$$\iint_{[1,2]\times[1,3]} xy^2\,dx\,dy$$

$$\begin{aligned}
\iint_{[1,2]\times[1,3]} xy^2\,dx\,dy &= \int_1^3 \left[\int_1^2 xy^2\,dx\right] dy \\
&= \int_1^3 \left[y^2\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right] dy \\
&= \int_1^3 \left[y^2\left(2-\tfrac{1}{2}\right)\right] dy \\
&= \tfrac{3}{2}\int_1^3 y^2 dy \;=\; \tfrac{3}{2}\times\frac{y^3}{3}\Big|_1^3 \\
&= 13
\end{aligned}$$



itération

Remarque : notation pour les intégrales itérées (lorsqu'on integre en premier par rapport à x)

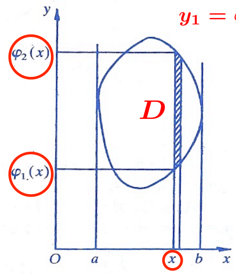
$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

On suppose maintenant que D a la propriété suivante :

La courbe C qui limite le domaine D rencontre en deux points seulement toute droite parallèle à l'axe des y, comprise entre les deux droites extrêmes $x = a$ et $x = b$.

Les ordonnées de ces deux points dépendent de x, soit

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x)$$



Rq : on aura cette propriété lorsque D est convexe

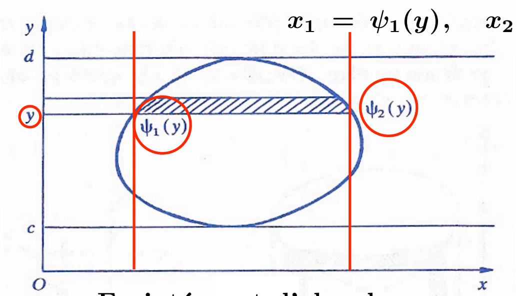
Alors l'intégrale de f sur D, le volume total, est donné par

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx \\
&= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx
\end{aligned}$$

La même méthode s'applique dans le cas où la courbe C qui limite le domaine D rencontre en deux points seulement toute droite parallèle à l'axe des x, comprise entre les deux droites extrêmes $y = c$ et $y = d$.

Les abscisses de ces deux points sont des fonctions de y :

$$x_1 = \psi_1(y), \quad x_2 = \psi_2(y)$$



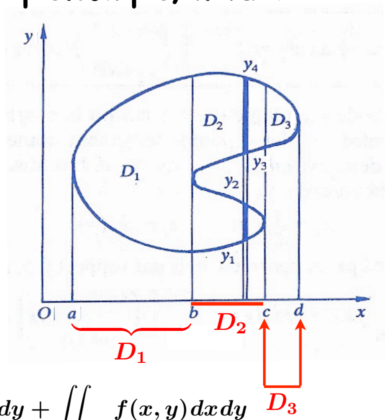
En intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y, nous obtenons

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Exemple

Dans le cas où le domaine D est quelconque, il faut en faire un examen attentif

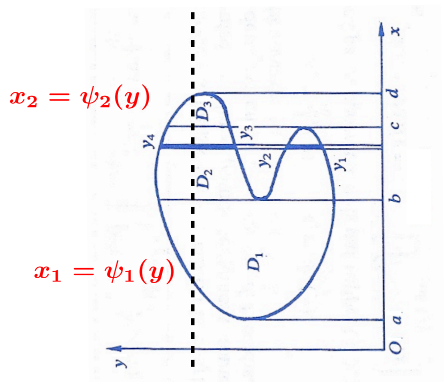
Une façon de découper le domaine D :



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy$$

où

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_b^c \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_b^c \int_{y_3}^{y_4} f(x,y)\,dy\,dx$$



on aurait pu faire autrement

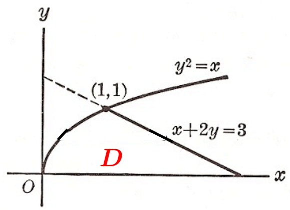
En intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y, nous obtenons

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Exemple

D est le domaine dans le premier quadrant limité par $y = 0$, $y^2 = x$, et $x + 2y = 3$. Calculer

$$\iint_D (12 - 3x - 4y)\,dx\,dy\,.$$



On veut itérer l'intégrale ; veut-on intégrer en premier par rapport à x, ou par rapport à y ?

Pour un y entre 0 et 1, les valeurs de x dans D vont de y^2 à $3 - 2y$.

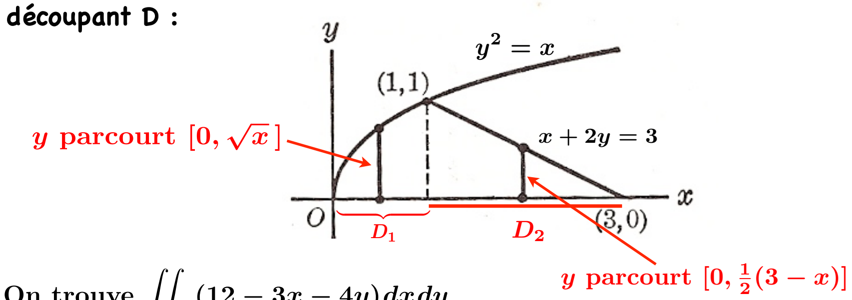
On trouve $\iint_D (12 - 3x - 4y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 \int_{y^2}^{3-2y} (12 - 3x - 4y)\,dx\,dy$$

On trouve $\iint_D (12 - 3x - 4y)\,dx\,dy$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_{y^2}^{3-2y} (12 - 3x - 4y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[12x - \tfrac{3}{2}x^2 - 4xy\right]_{y^2}^{3-2y} dy \\
&= \int_0^1 \left\{\tfrac{45}{2} - 18y - 10y^2 + 4y^3 + \tfrac{3}{2}y^4\right\} dy \\
&= \left[\tfrac{45}{2}y - 9y^2 - \tfrac{10}{3}y^3 + y^4 + \tfrac{3}{10}y^5\right]_0^1 \\
&= \tfrac{86}{15}
\end{aligned}$$

On aurait pu intégrer en premier par rapport à y, en découpant D :



On trouve $\iint_D (12 - 3x - 4y)\, dx\, dy$

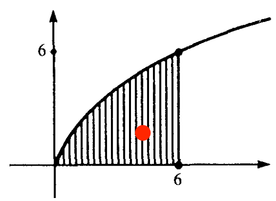
$$= \iint_{D_1} (12 - 3x - 4y)\, dx\, dy \; + \; \iint_{D_2} (12 - 3x - 4y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (12 - 3x - 4y)\, dy\, dx$$

$$+ \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} (12 - 3x - 4y)\, dy\, dx$$

Exemple

Trouver le centroïde du domaine D dans $\mathbb{R}^2_+$ délimité par les courbes $y^2 = 6x$, $y = 0$, et $x = 6$.



On calcule l'aire de D :

$$\text{aire}(D) = \iint_D dA = \int_0^6 \int_{y^2/6}^6 dx\, dy$$

$$= \int_0^6 \left(6 - \frac{y^2}{6}\right) dy$$

$$= \left[6y - \frac{1}{18} y^3\right]_0^6$$

$$= 6(6 - 2) = 24$$

Pour $\bar{y}$ il nous faut :

$$\iint_D y\, dA = \int_0^6 \int_{y^2/6}^6 y\, dx\, dy$$

$$= \int_0^6 y \left(6 - \frac{y^2}{6}\right) dy$$

$$= \left[3y^2 - \frac{1}{24} y^4\right]_0^6$$

$$= 36\left(3 - \frac{3}{2}\right) = 54$$

D'où la valeur de $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\, dA}{\iint_D dA}$$

$$= \frac{54}{24} = \frac{9}{4}$$

Exercice : vérifier que $\bar{x} = \frac{18}{5}$, donc que le centroïde est le point $\left(\frac{18}{5}, \frac{9}{4}\right)$.

Intégrales doubles en coordonnées polaires

coordonnées polaires (rappel en vo) :

prochain document

Fin des diapos du 9ème cours