

Analyse III

Fonctions de plusieurs variables

MAT2019L séquence 4

CM6

automne 2017

cours de
Francis Clarke

1

géométrie des courbes et des surfaces de niveau

3

rappel : **congé le premier
novembre**

annonce : **partiel le
15 novembre
(en amphi)**

2

Parabole

configuration
canonique

$$d(P, F) = d(P, \text{droite})$$

équation
canonique

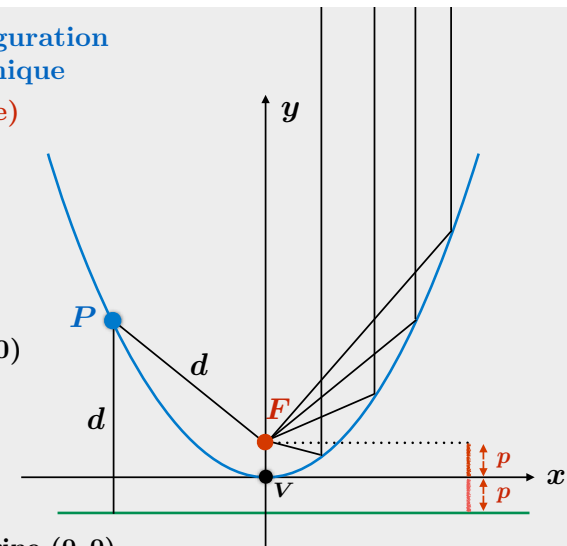
$$y = \frac{x^2}{4p} \quad (p > 0)$$

jargon parabolique

Le **sommet** : ici, l'origine $(0, 0)$.

Le **foyer** : le point $(0, p)$.

La **directrice** : la droite $y = -p$.



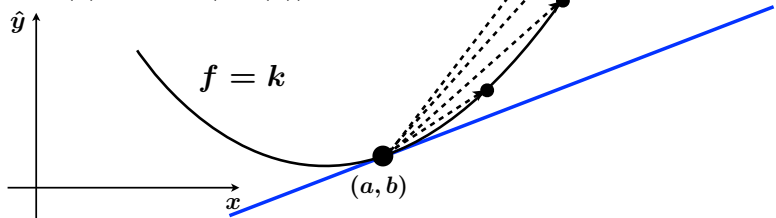
4

Soit $f(x, y) = k$ une courbe de niveau, où f est continûment dérivable, et (a, b) un point sur la courbe tel que $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$.

Disons $f_y(a, b) \neq 0$.

Alors il existe (localement) une fonction implicite $\hat{y}$ de classe C^1 telle que

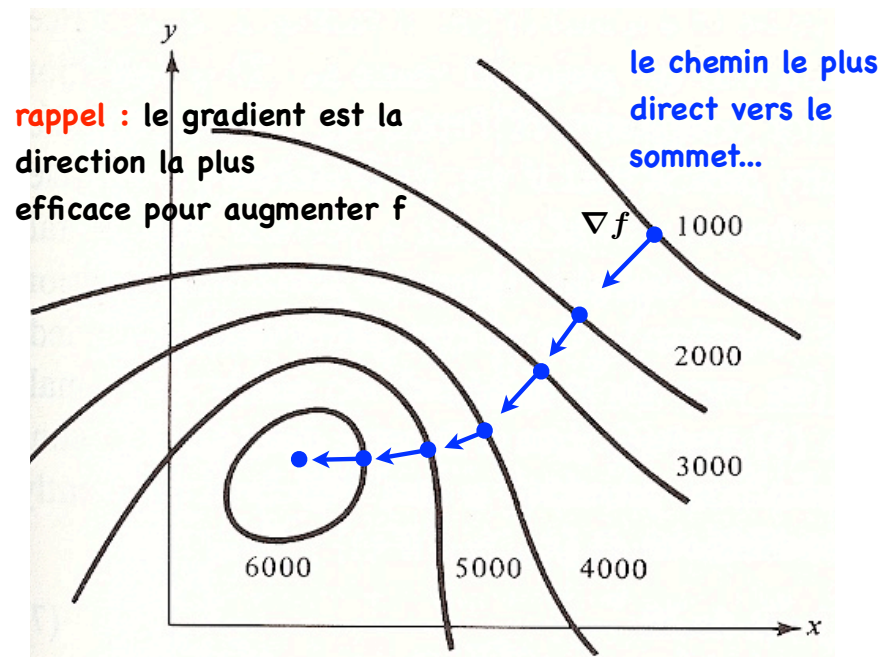
$$\hat{y}(a) = b, \quad f(x, \hat{y}(x)) = k.$$



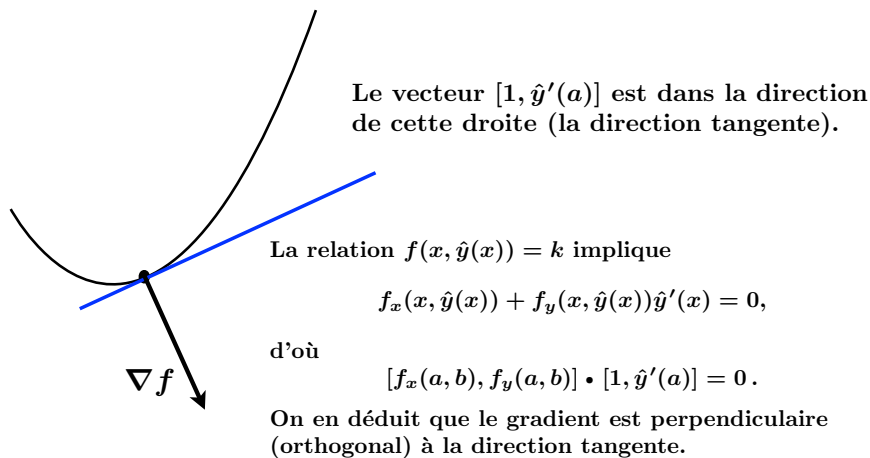
Les vecteurs (normalisés pour être unitaires) convergent vers un vecteur dit *tangent* à la courbe (en (a, b))

Mais la courbe est aussi le graphe de la fonction $\hat{y}$. Donc la droite tangente en (a, b) correspond à la fonction affine $y = \hat{y}'(a)x + r$ (la linéarisation de $\hat{y}$ autour de a). Le vecteur $[1, \hat{y}'(a)]$ est dans la direction de cette droite; c-à-d, la direction tangente.

5



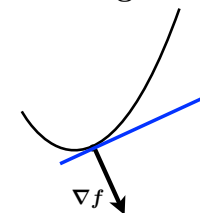
7



Conclusion. La direction du gradient en un point de la courbe de niveau est celle du vecteur normal à la courbe.

6

Théorème. Soit $f(x, y)$ une fonction qui est de classe C^1 dans un voisinage d'un point (a, b) se trouvant sur la courbe de niveau $f = k$. Si $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, alors ce vecteur est colinéaire avec le vecteur normal de la courbe en ce point. Donc la droite tangente à la courbe est orthogonale au gradient.



Théorème. Soit $f(x, y, z)$ une fonction qui est de classe C^1 dans un voisinage d'un point (a, b, c) se trouvant sur la surface de niveau $f = k$. Si $\nabla f(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors ce vecteur est colinéaire avec le vecteur normal de la surface en ce point. Donc le plan tangent à la surface est orthogonal au gradient.

8

Exo type Montrer que le point $(2, 1, 1)$ est commun aux deux surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0, \quad x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9,$$

et que les surfaces sont tangentes en ce point.

On vérifie que le point $(2, 1, 1)$ est bien sur les deux surfaces.

Le gradient de la fonction qui décrit la première surface:

$$\begin{bmatrix} 2x - 8 \\ 2y - 8 \\ 2z - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ en } (2, 1, 1) \quad \text{Le gradient de la fonction qui décrit la seconde surface:}$$

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 6y \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ en } (2, 1, 1)$$

Puisque les deux gradients sont co-linéaires, les deux surfaces admettent la même direction normale en ce point ; c-à-d, elles sont tangentes.

9

Optimisation sous contrainte égalité

11

Exemple. Trouver l'équation du plan tangent et de la droite normale à la surface $xy + z^2 = 3$ en $(1, 2, 1)$.

On vérifie que le point $(1, 2, 1)$ est bien sur la surface.

On calcule $\nabla f(1, 2, 1) = (y, x, 2z)$, d'où $\nabla f(1, 2, 1) = (2, 1, 2)$.

Le plan tangent passe par $(1, 2, 1)$ et admet ce vecteur comme direction normale. Il s'agit alors du plan décrit par

$$[(x, y, z) - (1, 2, 1)] \cdot (2, 1, 2) = 0 \iff 2x + y + 2z = 6.$$

La droite normale passe par $(1, 2, 1)$, elle est parallèle au gradient. Elle est donc donnée en forme paramétrique par

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(2, 1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

10

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A$$

La méthode déductive applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe ;
- Identifier les éventuelles solutions (conditions nécessaires) ;

Comparer les points trouvés afin de découvrir (ou les) solutions.

12

Optimisation élémentaire: on trouve les candidats en examinant les points critiques dans $\text{int } A$, et en étudiant séparément la frontière de A .

Exemple
une
solution
existe!

Trouver le minimum de $x^3 y^2 (x + y - 1)$ sur le pavé $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

comment la trouver?



- 1) On étudie la frontière ∂A de A .
- 2) On trouve les points critiques de f dans $\text{int } A$.
- 3) On compare les candidats ainsi identifiés.

13

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

Maintenant A sera décrit par une égalité exprimée par une autre fonction.

C'est à dire, A est un *ensemble de niveau*.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$$

sous la contrainte

Il s'agit donc de minimiser f **(slc)** $h = 0$.

Une des grandes idées du cours :
méthode du **multiplicateur**

14

notre problème d'optimisation (actuellement) :

$$(P) \quad \text{minimiser } f \text{ slc } h = 0$$

Ici, f et h sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, toujours supposées C^1

La phrase x_* est **solution de (P)** veut dire que :

- $x_* \in \mathbb{R}^n$ est admissible
(c-à-d, satisfait $h(x_*) = 0$)
- pour tout autre $x \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait $h(x) = 0$,
on a $f(x_*) \leq f(x)$

Exemple

Trouver le minimum de la fonction

$$f(x, y, z) := 3x - 2y + z$$

sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$$

Rq : la sphère,
non pas la boule

15

$$(P) \quad \text{minimiser } f \text{ slc } h = 0$$

règle du multiplicateur :

Théorème Soit x_* solution du problème de minimiser $f(x)$ slc $h(x) = 0$, où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\nabla h(x_*) \neq 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_*) + \lambda \nabla h(x_*) = 0.$$

λ = le multiplicateur

Il s'agit d'une **condition nécessaire** satisfaite par une solution du problème (P).

Elle est due à Euler (1744) et porte le nom :

Règle du multiplicateur de Lagrange (**RML**).

16

(P) minimiser f slc $h = 0$

règle du multiplicateur :

Théorème Soit x_* solution du problème de minimiser $f(x)$ slc $h(x) = 0$, où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\nabla h(x_*) \neq 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_*) + \lambda \nabla h(x_*) = 0.$$

Remarque En l'absence de la contrainte, la règle de Fermat donne n équations en n inconnues:

$$\nabla f(x_*) = 0.$$

Maintenant, il y a une nouvelle inconnue λ .

Mais l'équilibre est maintenu: on a $n + 1$ équations en $n + 1$ inconnues:

← le lagrangien L $\nabla L(x_*) = \nabla\{f + \lambda h\}(x_*) = 0$
 $\nabla\{f + \lambda h\}(x_*) = 0, \quad h(x_*) = 0.$

17

(P) minimiser f slc $h = 0$

règle du multiplicateur :

Théorème Soit x_* solution du problème de minimiser $f(x)$ slc $h(x) = 0$, où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\nabla h(x_*) \neq 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_*) + \lambda \nabla h(x_*) = 0.$$

$$\nabla L(x_*) = \nabla\{f + \lambda h\}(x_*) = 0$$

Exemple

Trouver le minimum de la fonction

$$f(x, y, z) := 3x - 2y + z \quad h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$$

sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

$$\text{Minimiser } 3x - 2y + z \text{ slc } x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$$

18

$$\begin{array}{l} \text{Minimiser} \\ 3x - 2y + z \\ \text{slc} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0 \end{array}$$

Théorème Soit x_* solution du problème de minimiser $f(x)$ slc $h(x) = 0$, où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\nabla h(x_*) \neq 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_*) + \lambda \nabla h(x_*) = 0.$$

$$\text{Ici on a } \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

En un point (x, y, z) de la sphère en question, le gradient de h ne peut pas s'annuler.

$$\text{Car } \nabla h(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$,
mais ce point n'est pas sur la sphère.

On en déduit que pour une solution (x, y, z) de notre problème, l'hypothèse $\nabla h \neq 0$ du théorème est certainement satisfaite.

On introduit λ et on écrit la stationnarité :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{ \quad \} = L$$

$$\Leftrightarrow \nabla\{3x - 2y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 14)\} = 0$$

Il suit que $\lambda \neq 0$ et que

$$x = \frac{-3}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = \frac{-1}{2\lambda} \Rightarrow \left(\frac{-3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 = 14 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

gagnant (la solution)

$$\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y, z) = (-3, 2, -1), \quad f = -14 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow (x, y, z) = (3, -2, 1), \quad f = 14 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{deux} \\ \text{candidats} \end{array}$$

A quoi correspond l'autre point trouvé, l'antipode ?

19

règle du multiplicateur :

Théorème Soit x_* solution du problème de minimiser $f(x)$ slc $h(x) = 0$, où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\nabla h(x_*) \neq 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_*) + \lambda \nabla h(x_*) = 0.$$

Démonstration géométrique

On peut supposer $\nabla f(x_*) \neq 0$. Car dans le cas contraire, on peut prendre $\lambda = 0$, et la conclusion recherchée

$$\nabla f(x_*) + \lambda \nabla h(x_*) = 0$$

est visiblement satisfaite.

Dans ce contexte, les courbes de niveau de f et h sont non dégénérées...

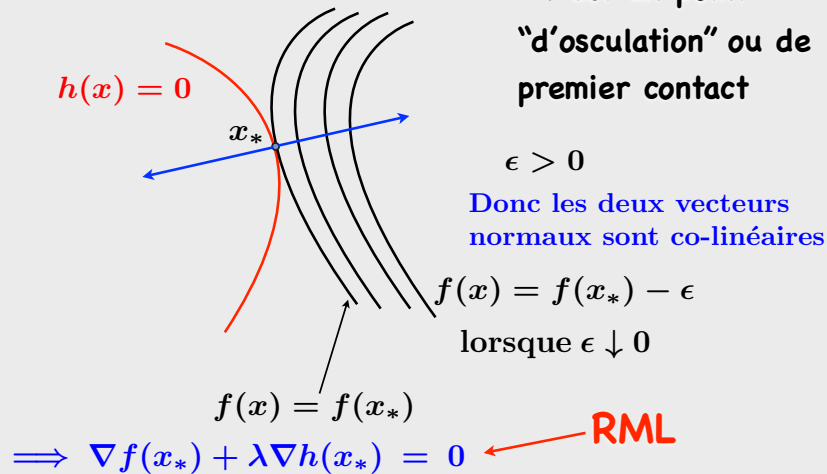
exemple d'une contrainte dégénérée :
 $x^2 + y^2 = 0$

20

(P) Minimiser $f(x)$ slc $h(x) = 0$ $f, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

solution x_*

x_* est un point
"d'osculation" ou de
premier contact



21

min $f(x, y)$ slc $h(x, y) = 0$

$$f(x, y) = -\pi x^2 y \quad L(x, y, \lambda) = -\pi x^2 y + \lambda \{2\pi x(y + 2x) - q\}$$

$$h(x, y) = 2\pi x(y + 2x) - q$$

On remarque que $\nabla h = \begin{bmatrix} 2\pi y + 8\pi x \\ 2\pi x \end{bmatrix}$, qui ne sera pas

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en une solution (x, y) .

Le théorème donne:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} -2\pi xy + 2\lambda\pi y + 8\lambda\pi x \\ -\pi x^2 + 2\lambda\pi x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

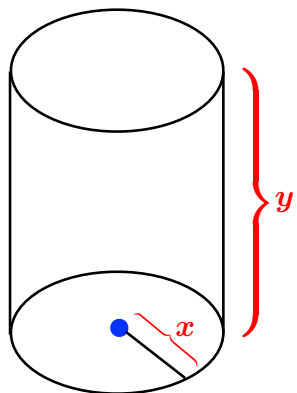
On trouve $x = 2\lambda$ et ensuite $y = 8\lambda$.

Enfin $h(2\lambda, 8\lambda) = 0$ implique

$$\lambda = \frac{\sqrt{q}}{4\sqrt{3}\pi}, \quad \underbrace{y = 4x}_{\text{les proportions}}, \quad f(x, y) = \frac{-q^{3/2}}{6\sqrt{3}\pi}$$

23

Exemple (cassoulet) On dispose d'une quantité (aire) q d'aluminium. Il s'agit de concevoir la boîte de conserve de volume maximal, sachant que la base et le haut doivent être de double épaisseur (pour la solidité).



$$\text{Volume} = \pi x^2 y$$

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= (2\pi x) \times y + 4 \times (\pi x^2) \\ &= 2\pi x(y + 2x) \end{aligned}$$

$$\min f(x, y) \text{ slc } h(x, y) = 0$$

$$f(x, y) = -\pi x^2 y$$

$$h(x, y) = 2\pi x(y + 2x) - q$$

Le problème : f

Minimiser $x + 2y$ s.l.c. $2x^2 + 3xy + y^2 + 12 = 0$.

Le lagrangien :

$$L = (x + 2y) + \lambda(2x^2 + 3xy + y^2 + 12).$$

On vérifie sans difficulté que $\nabla h \neq 0$.

$$\text{Stationnarité : } \begin{bmatrix} 1 + 4\lambda x + 3\lambda y \\ 2 + 3\lambda x + 2\lambda y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\lambda x + 3\lambda y \\ 3\lambda x + 2\lambda y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda x = -4, \lambda y = 5, \text{ et } h = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{-4}{\lambda}\right)^2 + 3\left(\frac{-4}{\lambda}\right)\left(\frac{5}{\lambda}\right) + \left(\frac{5}{\lambda}\right)^2 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) = (-8, 10), f = 12$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{(x, y) = (8, -10), f = -12} \quad \text{la solution}$$

22

24

Le problème : f
Minimiser $x + 2y$ s.l.c. $2x^2 + 3xy + y^2 + 12 = 0$.

Le lagrangien :
 $L = (x + 2y) + \lambda(2x^2 + 3xy + y^2 + 12)$.

On vérifie sans difficulté que $\nabla h \neq 0$.

Stationnarité : $\begin{bmatrix} 1 + 4\lambda x + 3\lambda y \\ 2 + 3\lambda x + 2\lambda y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4\lambda x + 3\lambda y \\ 3\lambda x + 2\lambda y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda x = -4, \lambda y = 5, \text{ et } h = 0 \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{-4}{\lambda}\right)^2 + 3\left(\frac{-4}{\lambda}\right)\left(\frac{5}{\lambda}\right) + \left(\frac{5}{\lambda}\right)^2 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) = (-8, 10), f = 12$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) = (8, -10), f = -12 \quad \text{la solution}$$

La "solution" est
fausse...
pourquoi ? comment ?

Mais on vous indique le point admissible : $(7, -11)$

$$h(7, -11) = 2(7)^2 + 3(7)(-11) + (-11)^2 + 12 = 0$$

$$f(7, -11) = -15 < -12 !!$$

25

Explication : Une solution rigoureuse utiliserait la *méthode déductive*. Il faudrait savoir qu'une solution existe. Dans cet exo, il n'y a pas de solution...

Q : Est-ce que l'existence d'un multiplicateur implique que x_* est solution de (P) ?

Non : l'existence d'un tel multiplicateur est une condition nécessaire, pas suffisante.

Pour le **premier exemple** (sur une sphère), on a (scandaleusement) trouvé la solution sans discuter de son existence. On aurait pu facilement prouver qu'une solution existe : il s'agit de minimiser une fonction continue sur une sphère (compact)... Weierstrass...

Pour le **problème du cassoulet**, c'est un peu plus compliqué de prouver l'existence. Comme pour le casson (que nous avons traité), il faut exploiter les contraintes implicites $x > 0, y > 0$...

On aurait pas pu prouver l'existence dans le **dernier exemple**, car c'est faux.

26

Utilisation de la méthode déductive avec RML

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

Notre problème maintenant :

$$(P) \quad \text{minimiser } f \text{ s.l.c. } h = 0$$

C'est le problème abstrait avec $A = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$

Si f est continue sur A , et si A est compact (ou si on montre que seule une partie compact de A est pertinente au problème), alors on peut appliquer le théorème de Weierstrass.

27

Exemple.

Minimiser $x + 2y$ s.l.c. $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Concernant l'existence : on montre que l'ensemble de niveau $h = 0$ est compact (et non vide). Puisque $f(x, y) := x + 2y$ est continue, le problème admet une solution (un min).

Preuve : L'ensemble est fermé (ensemble de niveau d'une fonction continue) et visiblement non vide. Il suffit de le prouver borné :

$$h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x + y)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 2, y^2 \leq 2.$$

L'hypothèse $\nabla h \neq 0$: La seule solution de

$$\nabla h = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est $(x, y) = (0, 0)$. Mais ce point n'est pas admissible. Donc on aura $\nabla h \neq 0$ au point solution.

28

Exemple.

Minimiser $x + 2y$ s.l.c. $x^2 + xy + y^2 = 1$. (suite)

On applique la règle du multiplicateur:

Le lagrangien est donné par

$$L = x + 2y + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1),$$

et la stationnarité donne

$$1 + \lambda(2x + y) = 0$$

$$2 + \lambda(x + 2y) = 0$$

Il suit que $\lambda \neq 0$ et

$$\frac{1}{\lambda} + 2x + y = 0$$

$$\frac{2}{\lambda} + x + 2y = 0$$

d'où $2(2x + y) = x + 2y \implies x = 0$.

Ensuite $h = 0 \implies y^2 = 1$.

On a donc deux candidats: $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

Le meilleur est $(0, -1)$. C'est la solution.

29

Les développements limités des fonctions de plusieurs variables

Dans un premier temps on considère l'approximation polynomiale d'une fonction de **deux** variables $f(x, y)$.

Rappelons le cas d'une fonction $f(x)$ d'une **seule variable**, étudié en grand détail en L1.

31

prochain sujet : les DL !

Comment définir et construire les DL
des fonctions de plusieurs variables ?

30

Soit f une fonction n fois dérivable en un point a .

Le **polynôme de Taylor** d'ordre n de la fonction f au point a veut dire le polynôme suivant :

$$P_{n,a,f}(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned} P_{4,0,f}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\quad + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 \\ &= \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

rappel

32

Lorsque que l'on a **terminologie**

$$f(x) = P_n(x) + o_a((x-a)^n),$$

où P_n est un polynôme d'ordre n ou moins, on dit que f admet un *développement limité* d'ordre n au point a .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o_a((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$$

Le terme $R_n := f - P_n$ est le *reste*. Donc on a

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

où le reste R_n est négligeable devant $(x-a)^n$ au point a .

En conséquent, P_n est une *approximation locale* de f en a d'ordre n .

Théorème (du reste de Lagrange)

Soit f une fonction $(n+1)$ -fois dérivable dans un intervalle ouvert contenant $[a, b]$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{n,a,f}(b) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}} \quad \mathbf{R_n} \quad !! \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Rq: Notons que si $c = a$, alors l'expression à droite coïncide avec $P_{n+1,f,a}(b)$.

Pour $n = 0$, le théorème devient le très familier théorème des accroissements finis (sous des hypothèses légèrement plus fortes) :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

33

35

existence et unicité d'un développement limité d'ordre n

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soit f une fonction de classe C^n dans un voisinage du point a , où $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme de Taylor $P_n = P_{n,a,f}$ satisfait

$$f(x) = P_n(x) + o_a((x-a)^n),$$

c'est-à-dire,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Le polynôme de Taylor $P_{n,a,f}$ est le seul polynôme de degré n ou moins qui possède cette propriété.

34

Le DL du premier ordre

36

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables,
continûment dérivable autour d'un point (a, b) .

On écrit $\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$.

On sait que $\Delta f \sim df(h, k)$ (grâce au théorème
des accroissements finis)

L'approximation affine (donc d'ordre un) autour du
point est alors :

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &\approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\ &= f(a, b) + df(a, b)(h, k) \\ &= f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (h, k) \end{aligned}$$

Alternativement, on a

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

justement le polynôme d'ordre un

37

Plus précisément:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ & + \epsilon(x - a, y - b) \|(x - a, y - b)\|, \end{aligned}$$

où $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \epsilon(h, k) = 0$. (Le choix de norme
est sans importance.)

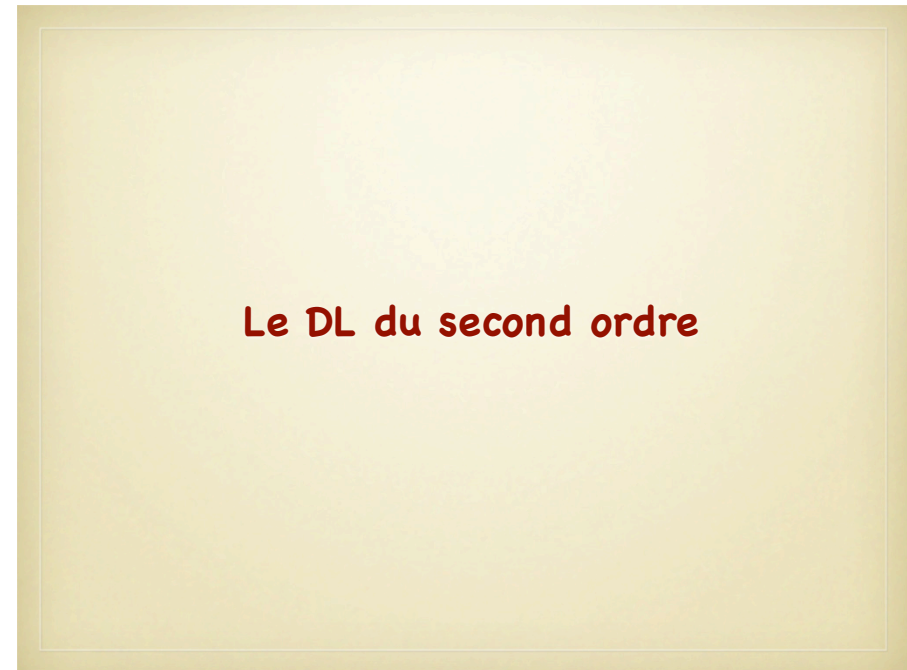
ce dernier terme est un "petit o"

Le polynôme

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

est le polynôme de Taylor d'ordre un (de f en (a, b)).
Il est noté $P_{1, (a, b), f}$.

38



39

Ordre deux

Soit $f(x, y)$ une fonction qui est C^2 autour
d'un point (a, b) .

Le polynôme de Taylor $P_{2, (a, b), f}$ (d'ordre deux) en
 (a, b) de f est le suivant:

$$P_{2, (a, b), f}(x, y) :=$$

$$\begin{aligned} & \overset{P_1}{f(a, b) + f_x(x - a) + f_y(y - b)} \\ & + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x - a)^2 + 2 f_{xy}(x - a)(y - b) + f_{yy}(y - b)^2 \}, \end{aligned}$$

où toutes les dérivées partielles sont évaluées en (a, b) .

40

Le polynôme de Taylor $P_{2,(a,b),f}$ (d'ordre deux) en (a,b) de f est le suivant:

$$P_{2,(a,b),f}(x,y) :=$$

$$f(a,b) + f_x(x-a) + f_y(y-b) + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x-a)^2 + 2f_{xy}(x-a)(y-b) + f_{yy}(y-b)^2 \},$$

où toutes les dérivées partielles sont évaluées en (a,b) .

Théorème. Le polynôme $P = P_{2,(a,b),f}$ satisfait

$$f(x,y) = P(x,y) + \epsilon(x-a, y-b) \|(x-a, y-b)\|^2,$$

où $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h,k) = 0$, et c'est le seul polynôme d'ordre deux ayant cette propriété.

On parle du développement de Taylor (ou DL) à l'ordre 2 de la fonction f au point (a,b) .

Théorème. Le polynôme $P = P_{2,(a,b),f}$ satisfait

$$f(x,y) = P(x,y) + \epsilon(x-a, y-b) \|(x-a, y-b)\|^2,$$

où $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h,k) = 0$, et c'est le seul polynôme d'ordre deux ayant cette propriété.

On écrit aussi (convention de Landau)

$$f(x,y) = P(x,y) + o(\|(x-a, y-b)\|^2),$$

où $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} o(h,k) / \|(h,k)\|^2 = 0$, ou encore

$$f(x,y) = P(x,y) + o((x-a)^2 + (y-b)^2)$$

(choix de la norme euclidienne). Abus : o est en réalité une fonction de (x,y) , ou de (h,k) !

Ce théorème suit du résultat plus général suivant, dû à Lagrange, qui donne une forme explicite au reste.

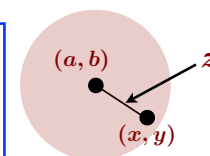
Théorème. Soit f de classe C^2 dans une boule ouverte U centrée en (a,b) . Soit $(x,y) \in U$. Alors il existe $t \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= P_{1,(a,b),f}(x,y) + \text{reste de Lagrange d'ordre deux} \\ &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x-a)^2 + 2f_{xy}(x-a)(y-b) + f_{yy}(y-b)^2 \}, \end{aligned}$$

où les dérivées d'ordre deux sont évaluées en $z = (1-t)(a,b) + t(x,y)$, un point dans l'intervalle ouvert déterminé par (a,b) et (x,y) .

Théorème des accroissements finis Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur un ouvert convexe U dans $\mathbb{R}^n$, et soit x, y deux points distincts dans U . Alors il existe $z \in]x, y[$ (donc dans U) tel que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x).$$



Théorème. Soit f de classe C^2 dans une boule ouverte U centrée en (a,b) . Soit $(x,y) \in U$. Alors il existe $t \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= P_{1,(a,b),f}(x,y) + \text{reste de Lagrange d'ordre deux} \\ &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x-a)^2 + 2f_{xy}(x-a)(y-b) + f_{yy}(y-b)^2 \}, \end{aligned}$$

où les dérivées d'ordre deux sont évaluées en $z = (1-t)(a,b) + t(x,y)$, un point dans l'intervalle ouvert déterminé par (a,b) et (x,y) .

corollaire : **Théorème.** Le polynôme $P = P_{2,(a,b),f}$ satisfait

$$f(x,y) = P(x,y) + \epsilon(x-a, y-b) \|(x-a, y-b)\|^2,$$

où $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h,k) = 0$, et c'est le seul polynôme d'ordre deux ayant cette propriété.

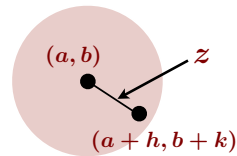
Preuve. Le fait que $f_{xx}(z)$ (par exemple) converge vers $f_{xx}(a,b)$ lorsque $(x,y) \rightarrow (a,b)$ (par la continuité de f_{xx}) donne lieu au terme noté $\epsilon \dots$

Autre énoncé, en posant $x-a = h$ et $y-b = k$

Théorème. Soit f de classe C^2 dans une boule ouverte U centrée en (a, b) . Soit $(a + h, b + k) \in U$. Alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \},$$

où les dérivées d'ordre deux sont évaluées au point $z = (a, b) + t(h, k)$.



45

Démonstration. La fonction d'une seule variable suivante

$$g(t) := f(a + th, b + tk)$$

est deux fois continûment dérivable dans un voisinage de l'intervalle $[0, 1]$. On invoque le développement limité (DL) connu d'une fonction d'une seule variable (avec reste de Lagrange) afin d'écrire

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(t) \quad (\text{où } t \in]0, 1[).$$

Pour obtenir le résultat voulu, il suffit maintenant de calculer $g'(0)$ et $g''(t)$ avec la règle de la chaîne.

□

$$g'(t) = f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k$$

$$g''(t) = f_{xx}(a + th, b + tk)h^2 + f_{xy}(a + th, b + tk)hk + f_{yx}(a + th, b + tk)hk + f_{yy}(a + th, b + tk)k^2$$

et on a $f_{xy} = f_{yx}$ par Clairaut...

46

Exemple Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = \ln(1 + x)e^y$ à l'origine.

On remarque que dans un voisinage de $(0, 0)$, la fonction admet des dérivées partielles continues de tout ordre. On les calcule, à l'ordre deux:

$f = \ln(1 + x)e^y$	$\rightarrow$	0
$f_x = \frac{e^y}{1 + x}$	$\rightarrow$	1
$f_y = \ln(1 + x)e^y$	$\rightarrow$	0
$f_{xx} = \frac{-e^y}{(1 + x)^2}$	$\rightarrow$	-1
$f_{xy} = \frac{e^y}{1 + x}$	$\rightarrow$	1
$f_{yy} = \ln(1 + x)e^y$	$\rightarrow$	0

On a les ingrédients du DL voulu :

$$P_{2,(a,b),f} = f(a, b) + f_x(x - a) + f_y(y - b)$$

$$+ \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x - a)^2 + 2f_{xy}(x - a)(y - b) + f_{yy}(y - b)^2 \}$$

$$\text{DL} = 0 + 1x + 0y + \frac{1}{2} \{ -1x^2 + 2 \times 1xy + 0y^2 \}$$

$$+ o(\|(x, y)\|^2)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + xy + o(x^2 + y^2)$$

(choix de la norme euclidienne)

47

Exemple Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = \ln(1 + x)e^y$ à l'origine.

méthode indirecte :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$$

d'où

$$f(x, y) = \ln(1 + x)e^y = (x - \frac{1}{2}x^2)(1 + y + \frac{1}{2}y^2) + o(x^2 + y^2)$$

$$= x + xy + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^2y^2 + o(x^2 + y^2)$$

$$= x + xy - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2 + y^2)$$

en tronquant à l'ordre deux

48

On imagine facilement que des DL d'ordre arbitraire peuvent être caractérisés et calculés.

Dans ce cours on s'arrête à l'ordre deux.

Les DL d'ordre deux auront une grande importance.

49

résumé sur les DL à ce point

51

Exemple Quel est le DL d'ordre deux en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x, y) = 1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5xy + 6y^2 + 7x^2y + 8xy^2 + 9x^3 ?$$

Réponse :

$$f(x, y) = 1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5xy + 6y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Pourquoi ? Les termes tronqués sont petit o de $\|(x, y)\|^2$.

Preuve :

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \frac{|x^2y|}{x^2 + y^2} &= \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \times |y| \rightarrow 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x^2y|}{x^2 + y^2} &= 0 \end{aligned}$$

50

Le polynôme

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

est le polynôme de Taylor d'ordre un (de f en (a, b)).
Il est noté $P_{1,(a,b),f}$.

Le polynôme de Taylor $P_{2,(a,b),f}$ (d'ordre deux) en (a, b) de f est le suivant:

$$P_{2,(a,b),f}(x, y) :=$$

$$f(a, b) + f_x(x - a) + f_y(y - b) + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x - a)^2 + 2 f_{xy}(x - a)(y - b) + f_{yy}(y - b)^2 \},$$

où toutes les dérivées partielles sont évaluées en (a, b) .

52

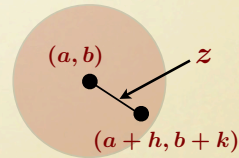
Le théorème de Lagrange (n=2) :

Théorème. Soit f de classe C^2 dans une boule ouverte U centrée en (a, b) . Soit $(a + h, b + k) \in U$. Alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que

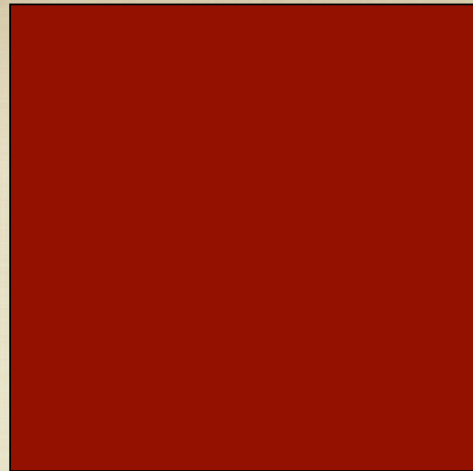
$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \},$$

où les dérivées d'ordre deux sont évaluées au point $z = (a, b) + t(h, k)$.

(excellente question
de cours)



53



Fin du sixième cours

54