

Analyse III

Fonctions de plusieurs variables

MAT2019L séquence 4

CM4

automne 2017

cours de
Francis Clarke

1

optimisation

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

2

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

L'importance en optimisation d'un théorème d'existence *a priori* vient de cette logique.

Cette logique fait défaut en absence d'un *théorème d'existence*

3

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Ce premier ingrédient est souvent fourni par le *théorème de Weierstrass*

4

Un résultat pionnier en topologie :

Théorème (de Weierstrass) Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où $A \subset \mathbb{R}^n$ est un compact non vide. Alors f atteint un minimum sur A , et atteint un maximum sur A .

Rq : On dit aussi que f atteint ses *extrémums*.

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Ce deuxième ingrédient passe par les dérivées...

Exemple

Trouver les extrémums de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

par rapport à l'intervalle $[-3, 4]$.

Solution

f est un polynôme donc continue et dérivable partout.

On trouve les points critiques de f dans l'intervalle en question :

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \implies x = -2 \text{ ou } x = 1$$

Le minimum de f sur l'intervalle, ainsi que le maximum, existent, par le théorème de Weierstrass (continuité + compacité).

Ils sont atteints soit sur la frontière, soit dans l'intérieur (en un point critique).

Les seuls candidats sont donc les points $-3, -2, 1, 4$.

5

7

Les seuls candidats sont donc les points $-3, -2, 1, 4$.

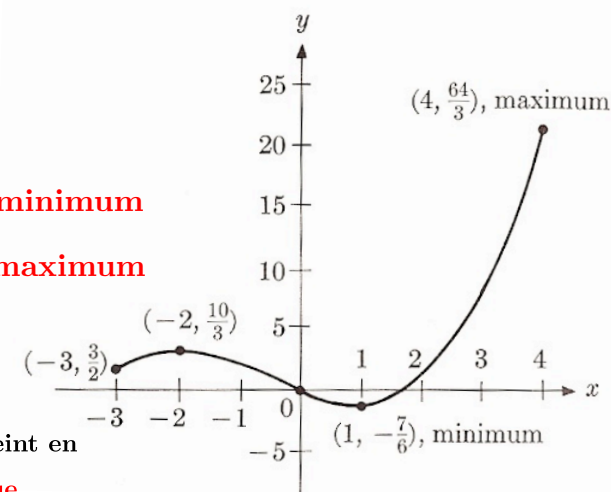
On calcule :

$$f(-3) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{10}{3}$$

$$f(1) = -\frac{7}{6} \quad \text{le minimum}$$

$$f(4) = \frac{64}{3} \quad \text{le maximum}$$



Rq : le max est atteint en un point *non critique*.

Le point critique -2 ne donne ni le min ni le max.

6

8

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Optimisation élémentaire dans $\mathbb{R}^n$:

pour $n = 1$, ceci veut dire
un point x tel que $f'(x) = 0$

sachant qu'une solution existe, on examine les

points critiques dans l'intérieur de A , et on

étudie séparément la frontière de A

Rq : si Weierstrass s'applique, on trouvera aussi les points où le max est atteint ; donc, tous les **extremums**

9

Comment définir "point critique"
pour une
fonction de plusieurs variables ?

Les dérivées partielles

11

Définition

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables qui est définie dans un voisinage du point (a, b) .

Lorsque la fonction partielle $x \mapsto f(x, b)$ est dérivable au point a , sa dérivée s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x , évaluée en a .

Elle est notée, par exemple, $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$. Ou encore $f_x(a, b)$.

Donc on a

$$f_x(a, b) = \frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

De même pour la dérivée partielle en y ... et
pour une fonction de trois variables, etc.

Notations diverses pour les dérivées partielles :

$$D_x f = D_1 f = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x_1} f = f_x = f'_x = f'_1 = f_1$$

10

12

Trouver f_x, f_y quand $f(x, y) = e^{2x+7y} \sin y$.

exemple

On calcule

$$f_x = 2e^{2x+7y} \sin y$$

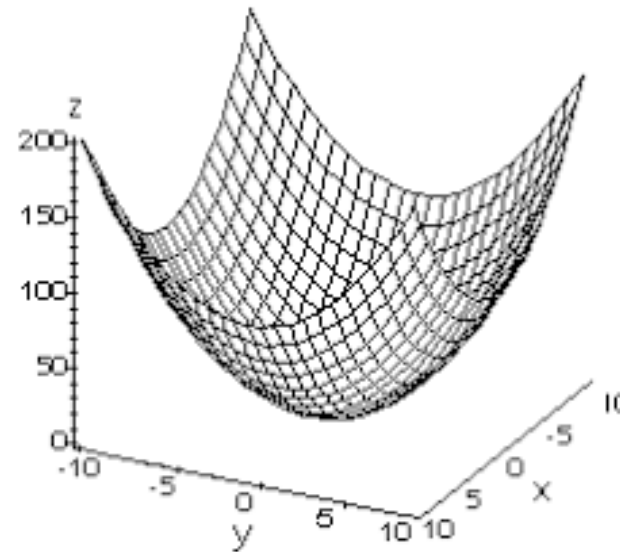
$$f_y = 7e^{2x+7y} \sin y + e^{2x+7y} \cos y$$

Le *gradient* d'une fonction réelle f sur $\mathbb{R}^n$ va jouer un rôle central:

Le gradient

$$\nabla f := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Convention Les points dans $\mathbb{R}^n$, lorsqu'ils interagissent avec des matrices/vecteurs, sont considérés comme des *colonnes*.



13

15

Une première application à l'optimisation :
la règle de Fermat

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est définie dans un voisinage d'un point (a, b) qui est un minimum local de f . On suppose en outre que le gradient de f en (a, b) existe.

Alors on a

$$\nabla f(a, b) = \begin{bmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

minimum local en (a, b) : Il existe $r > 0$ tel que

$$\|(x, y) - (a, b)\| < r \implies f(x, y) \geq f(a, b).$$

Vocabulaire. Un point où le gradient s'annule est un point critique de f

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est définie dans un voisinage d'un point (a, b) qui est un minimum local de f . On suppose en outre que le gradient de f en (a, b) existe.

Alors on a

$$\nabla f(a, b) = \begin{bmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Démonstration. Fixons $y = b$. La fonction partielle $x \mapsto f(x, b)$ atteint un min local en $x = a$. Sa dérivée s'annule donc en ce point. C'est à dire, on a $f_x(a, b) = 0$.

De même, on a $f_y(a, b) = 0$, d'où $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ (ou $[0, 0]^T$). ■

14

16

version $\mathbb{R}^n$

Théorème. Soit f une fonction qui est définie dans un voisinage d'un point x_* dans $\mathbb{R}^n$, où x_* est un minimum local de f . On suppose en outre que le gradient de f en x_* existe. Alors on a $\nabla f(x_*) = 0$.

minimum local en x_* :

Il existe une boule $B(x_*, r)$ telle que

$$x \in B(x_*, r) \implies f(x) \geq f(x_*).$$

Rq : même conclusion pour un maximum local : un max local est un point critique.
Il n'est **pas** dit qu'un point critique est un min ou un max

17

Exemple : problème du caniveau

19

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

Le problème abstrait

$$(P) \quad \min_A f$$

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

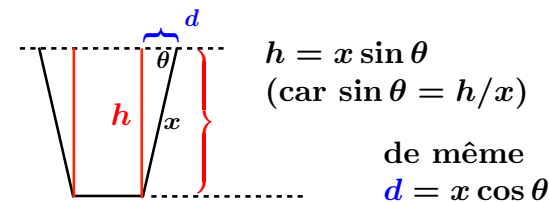
Optimisation élémentaire dans $\mathbb{R}^n$:

pour n quelconque, ceci veut dire un point x où toutes les dérivées partielles s'annulent

sachant qu'une solution existe, on examine les **points critiques** dans l'intérieur de A , et on étudie séparément la frontière de A

Exemple: design d'un caniveau

largeur du matériau (à plier) = ℓ



aire du triangle =

$$\frac{1}{2} h d = \frac{1}{2} x^2 \sin \theta \cos \theta$$

aire du reste (un rectangle)
 $= (\ell - 2x)h = (\ell - 2x)x \sin \theta$

$$\begin{aligned} \text{aire totale de la coupe transversale} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} x^2 \sin \theta \cos \theta + (\ell - 2x)x \sin \theta \\ &= x \sin \theta [\ell - 2x + x \cos \theta] \end{aligned}$$

la fonction $f(x, \theta)$ à maximiser

Mais sur quel domaine?

18

20

Pour la variable x , on a $0 \leq x \leq \ell/2$.



On remarque que $\theta > \pi/2$ est sans intérêt:



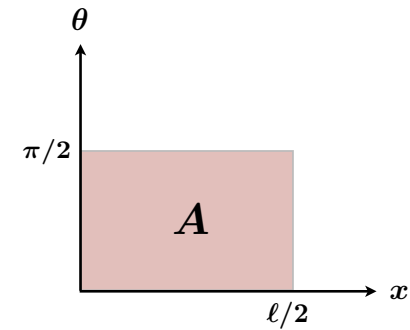
Donc pour θ , on considère $0 \leq \theta \leq \pi/2$.



Conclusion: Le domaine pertinent est le pavé

$$A = \{(x, \theta) \in [0, \ell/2] \times [0, \pi/2]\}.$$

21



- 1) On étudie la frontière ∂A de A .
- 2) On trouve les points critiques de f dans $\text{int } A$.
- 3) On compare les candidats ainsi identifiés.

Il s'agit d'appliquer **la méthode déductive**.

23

Le problème de design équivaut à maximiser

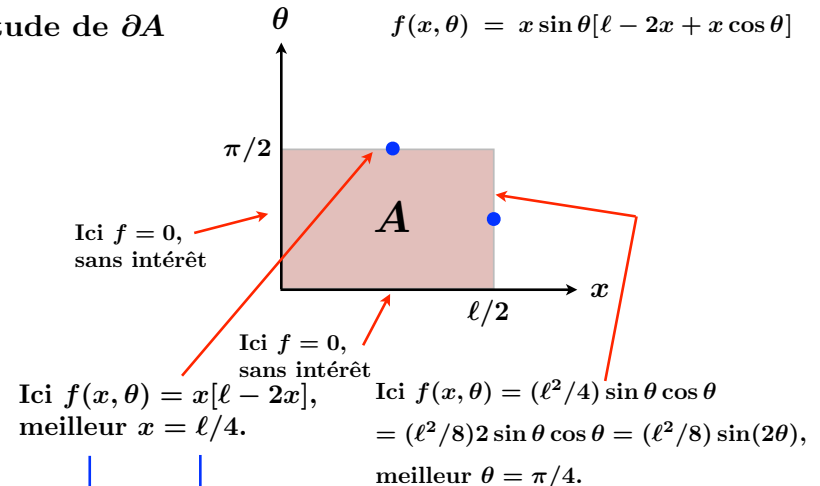
$$f(x, \theta) = x \sin \theta [\ell - 2x + x \cos \theta]$$

sur le pavé $A = [0, \ell/2] \times [0, \pi/2]$.

Puisque f est continue et A est compact, **une solution existe**, par le théorème.

Comment la trouver?

Etude de ∂A



22

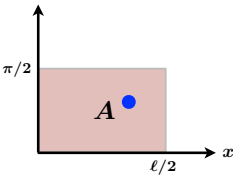
24

$f(x, \theta) = x \sin \theta [\ell - 2x + x \cos \theta]$ **Etude de int A**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin \theta [\ell - 2x + x \cos \theta] + x \sin \theta [-2 + \cos \theta]$$

$$= \sin \theta \{\ell - 4x + 2x \cos \theta\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = x \cos \theta [\ell - 2x + x \cos \theta] + x \sin \theta [-x \sin \theta]$$

$$= x \{\ell \cos \theta - 2x \cos \theta + x \cos^2 \theta - x \sin^2 \theta\}$$


On pose $\nabla f(x, \theta) = 0$:

$$\sin \theta \{\ell - 4x + 2x \cos \theta\} = 0$$

Puisque $x \neq 0$ et $\sin \theta \neq 0$
(car on est dans int A) ceci $\Rightarrow \ell = 2x(2 - \cos \theta)$.

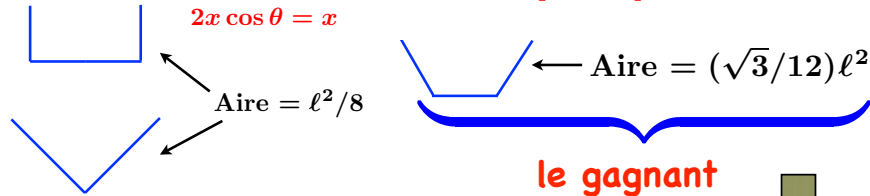
$$x \{\ell \cos \theta - 2x \cos \theta + x \cos^2 \theta - x \sin^2 \theta\} = 0$$

On substitue dans l'autre équation pour trouver $2x \cos \theta = x$

Aire = $\ell^2/8$

Aire = $(\sqrt{3}/12)\ell^2$

le gagnant



25

Exemple

Trouver le minimum de $x^3 y^2 (x + y - 1)$ sur le pavé $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

une
solution
existe!

Pour résoudre le problème $\min_A f$, la *méthode déductive* applique le raisonnement suivant :

- Prouver qu'une solution existe (c-à-d, que le minimum est atteint) ;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions, c-à-d, trouver les candidats ;
- Comparer les candidats afin de découvrir la (ou les) solutions.

Cette logique fait défaut en absence
du théorème d'existence

27

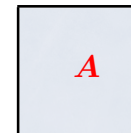
L'optimisation et la méthode déductive : un autre exemple

Exemple

Trouver le minimum de $x^3 y^2 (x + y - 1)$ sur le pavé $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

une
solution
existe!

comment la trouver?



- 1) On étudie la frontière ∂A de A .
- 2) On trouve les points critiques de f dans int A .
- 3) On compare les candidats ainsi identifiés.

Il s'agit d'appliquer **la méthode déductive**.

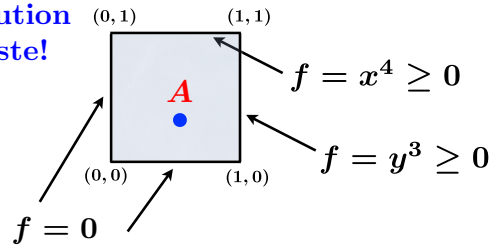
26

28

Exemple

Trouver le minimum de $x^3y^2(x+y-1)$ sur le pavé $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

une
solution
existe!



min dans ∂A ? Mais le min est < 0

Donc le min n'est pas dans ∂A

29

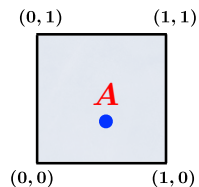
L'optimisation et la méthode déductive : encore un exemple

31

Exemple

Trouver le minimum de $x^3y^2(x+y-1)$ sur le pavé $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

une
solution
existe!



Points critiques dans $\text{int } A$:

$$3x^2y^2(x+y-1) + x^3y^2 = 0$$

$$2x^3y(x+y-1) + x^3y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+y-1) + x = 0$$

$$\Rightarrow 2(x+y-1) + y = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 2, 4x + 3y = 3$$

$$\Rightarrow x = 1/2, y = 1/3 \quad (\text{dans } A)$$

Donc le min n'est pas dans ∂A

forcément le min

30

Exemple

Trouver le minimum de $x^2 + y^2 + 3xy - 5x - 5y$ sur le pavé $\{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

1) une
solution
existe par Weierstrass (f continue, A compact)

2) points critiques dans $\text{int } A$: $2x + 3y = 5$
 $3x + 2y = 5 \Rightarrow x = 1, y = 1$

3) étude de $\text{fr } A$:

$$f(x, 3) = x^2 + 4x - 6 \Rightarrow \min_{[0,3]} f(x, 3) = -6 \quad (\text{en } x = 0, \text{ car } f'_x > 0)$$

$$f(3, y) = y^2 + 4y - 6 \Rightarrow \min_{[0,3]} f(3, y) = -6 \quad (\text{en } y = 0, \text{ car } f'_y > 0)$$

$$f(x, 0) = x^2 - 5x \Rightarrow \min_{[0,3]} f(x, 0) = -\frac{25}{4} \quad (\text{en } \frac{5}{2}, \text{ où } f'_x = 0)$$

$$f(0, y) = y^2 - 5y \Rightarrow \min_{[0,3]} f(0, y) = -\frac{25}{4} \quad (\text{en } \frac{5}{2}, \text{ où } f'_y = 0)$$

4) comparaison :

$$f(1, 1) = -5, f(3, 0) = f(0, 3) = -6$$

$$f(\frac{5}{2}, 0) = f(0, \frac{5}{2}) = -\frac{25}{4}$$

$\Rightarrow$ le minimum est atteint
en deux points, $(0, \frac{5}{2})$ et $(\frac{5}{2}, 0)$.

Il vaut $-\frac{25}{4}$.



32

Un théorème d'existence plus général

33

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A . Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leq f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E , alors (P) admet une solution x_* .

Rq : E est fermé lorsque A est fermé et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Preuve : On vérifie que E est stable sous les limites de suites.

Soit (x_i) une suite dans E qui converge vers une limite x . Alors (x_i) est une suite dans le fermé A , donc sa limite $x \in A$.

De plus, on a $\lim f(x_i) = f(x)$ car f est continue en x . Puisque $f(x_i) \leq f(\bar{x}) \forall i$, on en déduit $f(x) \leq f(\bar{x})$. Du coup, $x \in E$. ■

C'est généralement de prouver que E est borné qui est l'enjeu principal lorsque l'on utilise ce théorème

35

On a vu le danger d'utiliser la méthode déductive en absence d'un théorème d'existence

Théorème de Weierstrass

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact (fermé et borné) dans $\mathbb{R}^n$.

Si f est continue et A est non vide, alors le problème $\min_A f$ admet une solution.

$\min$
ou
 $\max$

Un théorème d'existence plus général (pour le $\min$) :

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A . Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leq f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E , alors (P) admet une solution x_* .

34

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A . Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leq f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E , alors (P) admet une solution x_* .

Rq : Le théorème de Weierstrass (pour le min) est un corollaire de celui-ci :

sous les hypothèses de Weierstrass, E est fermé par la remarque précédente, et borné parce que E est compris dans A qui est compact.

36

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A . Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leq f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E , alors (P) admet une solution x_* .

Démonstration :

On sait par Weierstrass que f admet un minimum par rapport à E , disons en un point x_* . On observe que $f(x_*) \leq f(\bar{x})$, car $\bar{x} \in E$. On a aussi $x_* \in A$, puisque $E \subset A$.

On prouve maintenant qu'en fait, x_* minimise f par rapport à A .

Soit $x \in A$ un point quelconque. Si x appartient à E , alors $f(x_*) \leq f(x)$, puisque x_* minimise f par rapport à E . Si x n'appartient pas à E , alors $f(x) > f(x_*)$ forcément. Dans tous les cas, on trouve $f(x) \geq f(x_*)$, montrant que x_* minimise f sur A . ■

37

Exemple

On cherche à construire un caisson de 20 m^3 ; le matériau pour les côtés coûte 1 euro/ m^2 ; pour le fond 2; pour le couvercle 3. Quel est le caisson le moins chère?

On observe qu'il s'agit de minimiser

$$C(x, y, z) = 2xz + 2yz + 2xy + 3xy = 2xz + 2yz + 5xy$$

sur $\text{int } \mathbb{R}_+^3$, sous la contrainte $xyz = 20$.

En remplaçant z par $20/xy$ (d'après la contrainte égalité), on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\min f(x, y) = \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \text{ sur } \text{int } \mathbb{R}_+^2$$

A

Ici, f est continue sur A , mais ce dernier n'est pas compact. Weierstrass ne s'applique donc pas.

38

$$\min f(x, y) = \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \text{ sur } \text{int } \mathbb{R}_+^2 \quad \mathbf{A}$$

Supposons que nous décidons de procéder déductivement malgré l'incertitude sur l'existence, en posant le gradient égal à zéro...

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 5y - \frac{40}{x^2} \\ 5x - \frac{40}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Ensuite on obtient } 5x = 40/x^2 \\ \implies x^3 = 8 \implies x = 2. \end{array}$$

$$\implies x^2 y = xy^2 \implies x = y,$$

Il vient $z = 20/xy = 5$, et le caisson optimal est $2 \times 2 \times 5$.

S'il existe !!

On complète l'argument en montrant comment le nouveau théorème d'existence s'applique à cet exemple.

39

$$\min f(x, y) = \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \text{ sur } \text{int } \mathbb{R}_+^2 \quad \mathbf{A}$$

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A . Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leq f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E , alors (P) admet une solution x_* .

En prenant pour $\bar{x}$ le point $(1, 1)$ (par exemple), l'ensemble E devient

$$\{(x, y) \in \text{int } \mathbb{R}^2 : \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \leq f(1, 1) = 85\}$$

$$(x, y) \in E \implies \frac{40}{x} \leq 85 \implies x \geq \frac{40}{85}$$

Ensuite

et de même $y \geq 40/85$.

On observe que f est continue sur E ; avec ces bornes on déduit aisément que E est fermé, par le critère de stabilité des suites. Il reste à prouver que E est borné.

$$5xy \leq 85 \implies x \leq \frac{85}{5y} = \frac{17}{y} \leq 17 \times \frac{85}{40}$$

et de même pour y .

Donc E est compris dans un certain pavé, et, par conséquent, est borné. ■

40

Les classes C et C^1

41

Par exemple, une fonction $f(x, y)$ de deux variables appartient à $C^1(\mathbb{R}^2)$ quand les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

existent pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et f ainsi que les deux fonctions

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

sont continues en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

exemple

Soit $f(x, y) = e^{2x+7y} \sin y$. Il est clair que $f \in C(\mathbb{R}^2)$.

On a calculé

$$f_x = 2e^{2x+7y} \sin y, \quad f_y = 7e^{2x+7y} \sin y + e^{2x+7y} \cos y,$$

d'où, visiblement, l'appartenance de f à la classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

43

Les classes $C(U)$ et $C^1(U)$

Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

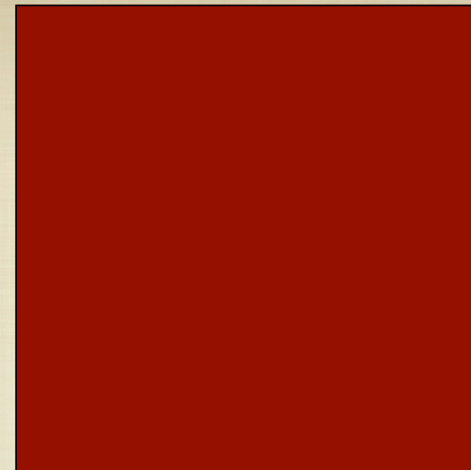
Lorsque f est continue dans U (c-à-d, en chaque point de U), on dit que f appartient à $C(U)$.

(Parfois on écrit $C^0(U)$.)

Lorsque f est continue et toutes ses dérivées partielles d'ordre un (c-à-d, chaque f_{x_i} ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) existent et sont continues (sur U), on dit que f appartient à $C^1(U)$.

On dit aussi que f est continûment dérivable

42



Fin du quatrième cours

44