Analyse III

Fonctions de plusieurs variables

MAT2019L séquence 4

CM2

automne 2017

cours de
Francis Clarke

Calendrier, programme, modalités et résumés de cours se trouvent sur la

Page de cours

Aller sur le site web de la Licence math, choisir "Licence 2ème année", ensuite cliquer sur "page de cours" près du nom Francis Clarke **2016-2017**

clarke@math.univ-lyon1.fr

Colles :

- Vos deux rdv sont sur Tomuss (2 groupes différents)
- Les salles sont sur ADE (pour Analyse III)
- Les groupes de colle A, B, C, D ont les salles K1, K2, K3, K4 (de la semaine concernée)

Exemple : Je trouve dans la colonne Colle_1 de Tomuss l'entrée 4-10B7h45. Je trouve sur ADE (pour le 4 octobre)

K1 Thémis 39, K2 Forel 104, K3 Forel 106, K4 Forel 108

Alors je me rends, mercredi le 4 octobre,
à la salle Forel 104 vers 7h40.

Rq : Il peut figurer des éléments de révision, des questions de cours, des exos comme en cours et en TD. Les noms et mails des colleurs sont sur la page web.

SVP :
arriver en cours pas plus tard que
5 minutes après l'heure

Séries

Soit (u_n) $(n = 1, 2 \dots)$ une suite de nombre réels.

La série attachée à (u_n) veut dire la somme infinie

$$\sum u_n \;=\; u_1 + u_2 + u_3 \dots$$

Exemple: la série harmonique

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Plus formellement, on associe à la série $\sum u_n$ la suite (S_n) définie par

$$S_n \;=\; u_1 + u_2 + \dots + u_n \,.$$

Les termes de la suite (S_n) sont appelés les sommes partielles de la série $\sum u_n$.

L'étude de la série $\sum u_n$ équivaut à l'étude de la suite (S_n) de ses sommes partielles.

Une série peut provenir, par exemple, d'un DL...

Un résultat de Euler :

$$\ln(2) \;=\; \tfrac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} + \dots$$

On peut ainsi calculer $\ln 2$ à la précision voulue, quitte à prendre n assez grand.

Si la suite (S_n) des sommes partielles converge vers une limite finie S, on dit que la série $\sum u_n$ est *convergente*, et on écrit

$$S \;=\; \sum u_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

La quantité $R_n = S - S_n$ est appelée *reste* de rang n de la série $\sum u_n$; on a

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0\,.$$

Si la suite (S_n) des sommes partielles ne tend pas vers une limite finie S, on dit que la série $\sum u_n$ est *divergente*.

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, alors la série est divergente, mais on dit en outre qu'elle *diverge vers* $+\infty$.

Remarques

1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum(cu_n + kv_n)$ converge et l'on a

$$\sum_{n\geq 1}(cu_n + kv_n) = c\sum_{n\geq 1} u_n + k\sum_{n\geq 1} v_n$$

2. La nature d'une série (convergence ou divergence) n'est pas modifiée si on change ou supprime les p premiers termes

3. Parfois il convient de commencer avec n = 0, selon le contexte :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 1} u_n$$

Exemple : la série harmonique

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Proposition. Soit S_n la n-ième somme partielle de la série harmonique; c'est-à-dire,

$$S_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (n \geqslant 1).$$

Alors on a

$$\ln(n-1) \leq S_n \leq \ln n + 1 \quad (n \geqslant 2).$$

Corollaire. La série harmonique diverge; c-à-d :

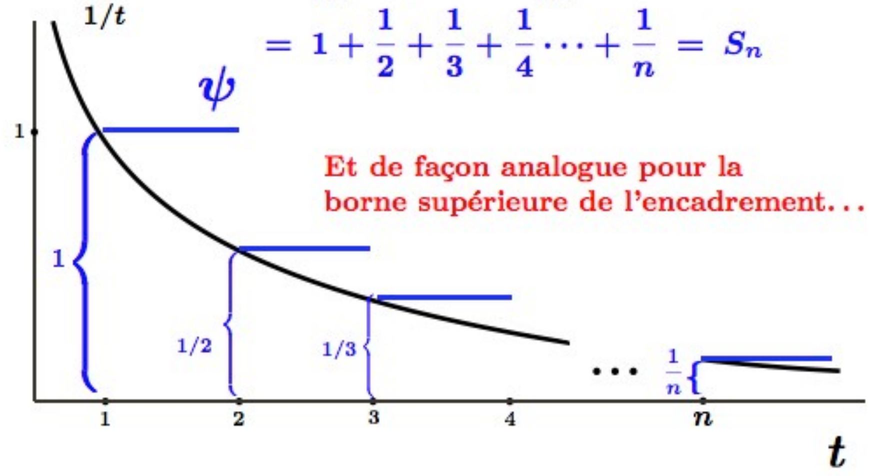
$$\lim_{n\to\infty} S_n \to +\infty.$$

(C'est un célèbre théorème prouvé autrement par Jacques Bernoulli en 1689.)

On veut $\ln(n-1) \leq S_n \leq \ln n + 1 \quad (n \geqslant 2)$

$$\ln(n-1) = \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^{n+1} \psi(t)\,dt$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n} = S_n$$



Et de façon analogue pour la borne supérieure de l'encadrement...

Remarque :

Mais elle diverge *très* lentement:

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} \approx 3,60\,; \qquad \sum_{k=1}^{220} \frac{1}{k} \approx 5,98\,; \qquad \sum_{k=1}^{20220} \frac{1}{k} \approx 10,49.$$

Exemple: une série géométrique (raison $q \neq 0$ fixé)

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1+q+q^2+q^3+\dots$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1+q+q^2+\cdots+q^n \\ qS_n &= q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1} \\ &= S_n - 1 + q^{n+1} \\ &\Longrightarrow S_n(q-1) = q^{n+1}-1 \\ &\Longrightarrow S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (\text{si } q \neq 1) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{n\geq 0} q^n \begin{cases} \text{converge vers } \frac{1}{1-q} & \text{si } |q|<1 \\ \text{diverge vers } +\infty & \text{si } q \geq 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

La **question principale** concernant une série

$$\sum u_n$$

sera : est-ce que celle-ci converge ?

Il n'est pas possible en général de calculer la somme (lorsque la série converge) ; **exceptions :** géométrique, DL connu, série téléscopique.

Une condition nécessaire pour la convergence d'une série

Proposition Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il faut que son terme général u_n tende vers 0 quand $n \to \infty$.

Démonstration On a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Or le côté droit tend vers $S - S = 0$ lorsque $n \to \infty$. ■

Remarque : la série harmonique montre que la condition n'est **pas suffisante**. Quand u_n ne tend pas vers 0, on dit que la suite diverge grossièrement.

On aborde maintenant des critères **suffisants**, dans le cadre des séries **positives** (c-à-d, $u_n \geq 0$)

Proposition Une série $\sum u_n$ positive converge ssi la suite (S_n) de ses sommes partielles est bornée.

Démonstration $\Longrightarrow$

Si (S_n) converge, alors cette suite est bornée.

$\Longleftarrow$

Si (S_n) est bornée, alors il s'agit d'une suite croissante et bornée, qui admet donc une limite finie. ■

Définition Soit $\sum u_n$ une série. Nous appellerons **série extraite** de la série $\sum u_n$ une série dont les termes s'obtiennent en prenant certains des termes de la précédente.

Précisément, il s'agit d'une série $\sum v_n$ où $v_n = u_{\varphi(n)}$, φ étant une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Corollaire Toute série extraite d'une série positive convergente est elle-même convergente.

Démonstration Soit $S = \lim S_n$ la somme de la série $\sum u_n$, et soient T_n les sommes partielles de la série extraite $\sum v_n$. Alors $T_n \leq S_n \leq S$, d'où la série $\sum v_n$ est une série positive dont les sommes partielles sont bornées. Par la proposition, la série $\sum v_n$ converge. ■

Exemple Soit (p_n) la suite des nombres premiers : $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$.
Alors la série $\sum \frac{1}{2^{p_n}}$ est convergente.

(car il s'agit d'une série extraite de la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$, qui converge)

Corollaire (comparaison) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui vérifient $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Dans ce cas,

si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ;

si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple : La série $\sum \frac{1}{n 2^{p_n}}$ est convergente.

Proposition Si deux séries à termes positifs sont telles que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0 \,, \qquad \boxed{\begin{array}{l} u_n \sim k\, v_n \\ \text{quand } n \to \infty \end{array}}$$

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration A partir d'un certain rang on peut écrire

$$\frac{k}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3k}{2} \implies \frac{k}{2} v_n < u_n < \frac{3k}{2} v_n \,.$$

Par conséquent (comparaison), $\sum u_n$ converge si $\sum v_n$ converge, et $\sum u_n$ diverge si $\sum v_n$ diverge. ■

Exemple : La série $\sum \sin \frac{\pi}{n}$ diverge.

(ces termes sont positifs à partir de $n = 2$, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 1 > 0 \,,$$

donc même nature que la série harmonique)

De façon plus générale, on obtient la règle de comparaison à la limite suivante :

Proposition Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0 \implies \text{les séries sont de même nature}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ et } \sum b_n \text{ converge} \implies \sum a_n \text{ converge}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \text{ et } \sum b_n \text{ diverge} \implies \sum a_n \text{ diverge}$$

Corollaire (équivalence) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui vérifient

$$u_n = f(n), \; v_n = g(n),$$

$f \sim_\infty g \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

où f et g sont des fonctions positives. Si $f \sim_\infty g$, alors les deux séries sont de même nature.

On introduit maintenant deux critères plus structurés, adaptés aux puissances, ou aux produits et factorielles :

- **la règle de Cauchy**
- **la règle de D'Alembert**

Proposition (règle de Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \,.$$

Alors si $\ell < 1$ la série est convergente, et si $\ell > 1$ la série est divergente. (On ne peut conclure si $\ell = 1$.)

Proposition (règle de D'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \,.$$

Alors si $\ell < 1$ la série est convergente, et si $\ell > 1$ la série est divergente. (On ne peut conclure si $\ell = 1$.)

Proposition (règle de Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell .$$
Alors si $\ell < 1$ la série est convergente, et si $\ell > 1$ la série est divergente. (On ne peut conclure si $\ell = 1$.)

Démonstration Si $\ell < 1$, on peut trouver q vérifiant $\ell < q < 1$ tel que, à partir d'un certain rang, on a
$$|\sqrt[n]{u_n} - \ell| < q - \ell \implies \sqrt[n]{u_n} < q \implies u_n < q^n .$$
Par conséquent (comparaison), $\sum u_n$ converge (la série géométrique étant convergente).

Si $\ell > 1$, alors à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, donc $u_n \geq 1$ et ne tend pas vers 0 : la série diverge forcément. ■

La démonstration de la règle de D'Alembert est de même nature...

Proposition (règle de Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell .$$
Alors si $\ell < 1$ la série est convergente, et si $\ell > 1$ la série est divergente. (On ne peut conclure si $\ell = 1$.)

Proposition (règle de D'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell .$$
Alors si $\ell < 1$ la série est convergente, et si $\ell > 1$ la série est divergente. (On ne peut conclure si $\ell = 1$.)

Exemple : $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \implies \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \to ?$$
$$\implies \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

On déduit par D'Alembert que la série converge.

(Que vaut la somme ?) e $\left(e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots\right)$

Exemple : $$\sum \frac{1}{n^2} \implies \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{2/n} \to 1$$
$$\implies \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

$\ln = \frac{2}{n} \ln \frac{1}{n} \to 0$ (croiss comp)

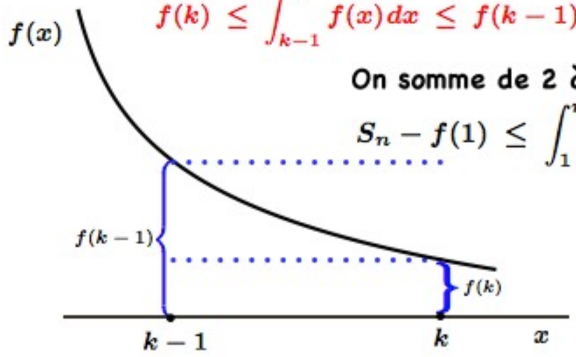
Aucune des deux règles donne une conclusion...

Comparaison avec une intégrale généralisée (impropre)

Proposition (règle de comparaison intégrale) Si $f(x)$ est une fonction continue et positive sur $[1, +\infty[$ qui est décroissante à partir d'une certaine valeur de x, alors l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.

Démonstration (On prend f décroissante)

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$$



On somme de 2 à n pour déduire
$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}$$

La conclusion voulue s'ensuit

Corollaire (Riemann) La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^p}$ est convergente si le paramètre $p > 1$, et divergente si $p \leq 1$.

Démonstration

Si $p > 1$, la fonction $f(x) = 1/x^p$ est continue, positive, et décroissante pour $x \geq 1$.

Par la proposition précédente, la série $\sum \frac{1}{n^p}$ et l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ sont de même nature.

Mais l'intégrale est convergente, car
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right|_1^b = \frac{1}{p-1}$$

Pour $p \leq 1$, on voit facilement que l'intégrale diverge, donc la série diverge aussi. ■

Proposition (règle de Riemann) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(a) S'il existe $p > 1$ et $C > 0$ tels que, à partir d'un certain rang, on a $n^p u_n < C$, alors la série $\sum u_n$ converge.
(C'est notamment le cas si $\lim_{n\to\infty} n^p u_n < +\infty$.)

(b) S'il existe $p \le 1$ et $C > 0$ tels que, à partir d'un certain rang, on a $n^p u_n > C$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
(C'est notamment le cas si $\lim_{n\to\infty} n^p u_n > 0$.)

(La démonstration se fait facilement avec la comparaison appliquée aux séries de Riemann.)

Exemples : (1) $\sum \dfrac{5n^2+1}{n^5-n^3-1}$ converge parce que

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \times \frac{5n^2+1}{n^5-n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^5+n^3}{n^5-n^3-1} = 5.$$

(2) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{\ln n}}$ diverge parce que

$$\lim_{n\to\infty} n \times \frac{1}{\sqrt{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sqrt{\frac{n}{\ln n}} = +\infty.$$

comparaison par domination et équivalence

Corollaire (comparaison) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui vérifient (à partir d'un certain rang)

$$u_n = f(n), \; v_n = g(n),$$

où f et g sont des fonctions positives. Si $f = O_\infty(g)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve :

$$f = O_\infty(g) \implies \exists M, N \text{ t.q. } |f(x)| \le M|g(x)| \text{ pour } x \ge N$$
$$\implies |u_n| \le M|v_n| \text{ à partir d'un certain rang}\ldots$$

Exemple : Etudier $\sum u_n$, où $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$.

On pose $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, donc $u_n = f(n)$.

Soit $g(x) := \dfrac{1}{x^{3/2}}$. On a $f = O_\infty(g)$, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = 0$$
$$\implies f = o_\infty(g)$$
$$\implies f = O_\infty(g)$$

Vue que $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, on en déduit la convergence de $\sum u_n$.

Corollaire (équivalence) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui vérifient (à partir d'un certain rang)

$$u_n = f(n), \; v_n = g(n),$$

où f et g sont des fonctions positives. Si $f \sim_\infty g$, alors les deux séries sont de même nature.

Corollaire (équivalence) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui vérifient (à partir d'un certain rang)

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right), \; v_n = g\left(\frac{1}{n}\right),$$

où f et g sont des fonctions positives. Si $f \sim_0 g$, alors les deux séries sont de même nature.

$$f \sim_0 g \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Rappel sur les limites :
la règle de l'Hospital

Quand $f(a) = g(a) = 0$, le théorème suivant (dû à Jean Bernoulli, mais portant le nom du marquis qui lui apportait son patronage) est un outil qui sert dans certains cas à lever l'indétermination du quotient f/g en a.

Théorème (Règle de l'Hospital) Soit I un intervalle ouvert contenant le point a. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I\setminus\{a\}$ telles que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty,$$

et supposons de plus que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existe. Alors $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ existe, et

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque. L'énoncé du théorème sous-entend que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \neq a$ suffisamment proche de a.

Le théorème comprend les cas où $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

exemple

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

On vérifie que la règle de l'Hospital s'applique. On observe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

exemple

Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}.$$

On vérifie que la règle de l'Hospital s'applique. On observe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\ln^2(1+x)]'}{[1-\cos x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x)}{(1+x)\sin x},$$

toujours indéterminée. On dérive encore :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+x}}{\sin x + (1+x)\cos x} = 2,$$

d'où la réponse 2 pour la limite initiale.

exemple Calculer

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(e^x - e^{-x})}{\ln x}.$$

$$\frac{[\ln(e^x - e^{-x})]'}{[\ln x]'} = \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}{\frac{1}{x}} = (e^x + e^{-x})\underbrace{\frac{x}{e^x - e^{-x}}}_{\to\,?}$$

$$\frac{[x]'}{[e^x - e^{-x}]'} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \to \frac{1}{2},$$

d'où la réponse $2 \times \frac{1}{2} = 1$ pour la limite initiale.

Rq :

on a prouvé que $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) \sim_0 \ln x$

la règle de l'Hospital quand x tend vers +∞

Théorème (Règle de l'Hospital) Soient f et g deux fonctions dérivables autour de $+\infty$ telles que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0,$$

ou

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty,$$

et supposons de plus que $\lim_{x\to +\infty} f'(x)/g'(x)$ existe. Alors $\lim_{x\to +\infty} f(x)/g(x)$ existe, et

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque.

Le théorème comprend les cas où $\lim_{x\to +\infty} f'(x)/g'(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

exemple Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x+e^{-x}\right)}{\ln x}.$$

$$\frac{\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}}{\frac{1}{x}} = \left(1-e^{-x}\right)\frac{x}{x+e^{-x}} \to 1,$$

quand $x \to +\infty$, d'où la réponse 1.

Rq :

Ceci prouve que $\ln\left(x+e^{-x}\right) \sim_\infty \ln x$

Rappel. On peut souvent trouver un équivalent simple par le DL, car si (par exemple) on a

$$f(x) = cx^p + o(x^p) \quad (c \neq 0),$$

alors $f \sim_0 x^p$.

Application aux séries : quelques exemples

exemple 1. $\sum \frac{\ln\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)}{n^2}$: On a vu (comparaison) que $\sum \frac{\ln(1/n)}{n^2}$ converge. Il suit que $\sum \frac{\ln\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)}{n^2}$ converge, car $\ln\left(e^{x}-e^{-x}\right) \sim_0 \ln x$ (prouvé ci-dessus).

exemple 2. $\sum n \sin\frac{1}{n^2}$: Les termes sont positifs, et $\sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ à l'infini (par le DL de sin en 0). Donc même nature que la série harmonique : diverge.

exemple 3.

$\sum \frac{5n^2+1}{n^5-n^3-1}$:

converge parce que $\frac{5n^2+1}{n^5-n^3-1} \sim_\infty \frac{5}{n^3}$ (qui converge, Riemann)

exemple 4. $\sum \ln\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)$

Le terme dans le ln tend vers 1. On a (DL du premier ordre)

$$\ln(1+x) \sim x \text{ en } x=0, \text{ c-à-d } \ln(1+x) = x + o(x)$$

$$\frac{1+x}{1-x} \sim$$

$$\implies \ln\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right) \sim 2\tan\frac{1}{n} \quad (\text{quand } n \to \infty)$$

$$\sim \frac{2}{n} \quad (\text{c-à-d, } \lim n u_n = 2)$$

Puisque $u_n \sim \frac{2}{n}$ quand $n \to \infty$, la série a la même nature que la série harmonique (diverge).

Séries à termes réels de signes variables

La nature de ces séries est plus difficile à déterminer.

Il est possible, par exemple, que deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ aient des termes équivalents à la limite (c-à-d, $\lim u_n/v_n = 1$), mais que l'une converge et l'autre diverge.

On va voir que la notion de **convergence absolue** simplifie beaucoup l'analyse. Et on étudiera les **séries alternées**...

Proposition Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. On associe à $\sum u_n$ la série $\sum v_n$ où $v_n = |u_n|$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. Soit P_n la somme des termes positifs jusqu'au rang n de la série $\sum u_n$:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \max(0, u_k),$$

et Q_n la somme des valeurs absolues des termes négatifs :

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} \max(0, -u_k).$$

On a alors $S_n = P_n - Q_n$ et $\sum_{k=1}^{n} v_k = P_n + Q_n$.

Puisque la série positive $\sum v_n$ converge (par hypothèse), ses sommes partielles sont bornées. Du coup, les suites (P_n) et (Q_n) (qui sont visiblement croissantes) sont bornées, et alors convergentes. Notons $P = \lim_{n\to\infty} P_n$ et $Q = \lim_{n\to\infty} Q_n$. Il vient que S_n converge vers $P - Q$, d'où la convergence de $\sum u_n$. ■

D'après la proposition, on peut donc vérifier la convergence d'une série en appliquant les critères ci-dessus (Cauchy, D'Alembert, Riemann, comparaison intégrale...) à la série positive de ses valeurs absolues.

Reste les séries qui convergent, mais sans que la série des valeurs absolues converge...

Définition La série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* lorsque la série $\sum |u_n|$ converge (ce qui garantit sa convergence).

Elle est dite *conditionnellement convergente* ou *semi-convergente* lorsque $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge.

Dans cette dernière sorte de série, c'est le cas des **séries alternées** qui nous intéressera le plus.

Séries alternées

Il s'agit d'une série dans laquelle, à partir d'un certain rang, le terme général est alternativement positif et négatif.

Exemple : la série harmonique alternée

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots = \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Théorème Pour qu'une série alternée converge, il suffit que la valeur absolue de son terme général tende vers 0 en décroissant.

La série harmonique alternée converge conditionnellement mais pas absolument

Démonstration On supposera la condition d'alternance de signe remplie à partir de u_0, avec les termes d'indices pairs positifs, ceux d'indices impairs négatifs. On désignera le terme général par $(-1)^n u_n$ (où les u_i sont alors positifs et forment une suite décroissante).

On construit la suite des sommes de rang pair :

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 \\ S_2 &= u_0 - (u_1 - u_2) \\ &\vdots \\ S_{2p} &= u_0 - (u_1 - u_2) - \cdots - (u_{2p-1} - u_{2p}) \end{aligned}$$

Il suit que la suite (S_{2p}) est décroissante. On construit aussi la suite des sommes de rang impair :

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 - u_1 \\ S_3 &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) \\ &\vdots \\ S_{2p+1} &= (u_0 - u_1) + \cdots + (u_{2p} - u_{2p+1}) \end{aligned}$$

La suite (S_{2p+1}) est visiblement croissante.

De plus, $S_{2p} - S_{2p+1} = u_{2p+1}$ est positif et tend vers 0 lorsque $p \to \infty$. Dans ces conditions, on voit que (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont deux suites adjacentes admettant une limite commune, qui n'est autre que la somme de notre série alternée lorsque $n \to \infty$; donc la série converge.
■

Résumé sur les séries : que faut-il absolument retenir ?

- séries : généralités, notation, jargon…
- règle de comparaison directe, par domination, ou par équivalence
- règles de Riemann, Cauchy, D'Alembert
- règle de comparaison intégrale
- théorème sur les séries alternées