Analyse III

Fonctions de plusieurs variables

MAT2019L séquence 4

automne 2017

CM11

cours de
Francis Clarke

Suites, séries, et intégrales dépendant d'un paramètre

1. Suites

Soit (f_n) une suite de nombres réelles. On sait ce que veut dire sa convergence vers une limite $f \in \mathbb{R}$:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N = N(\epsilon) \text{ tq } n \geq N \implies |f_n - f| < \epsilon.$$

On considère maintenant le cas où les f_n dépendent d'un paramètre. Disons d'un paramètre réel appelé x. Autrement dit, f_n est une fonction $f_n(x)$, et on s'intéresse à la convergence de la *suite de fonctions* $(f_n(x))$.

Il y a plusieurs notions de convergence d'une suite (f_n) de fonctions vers une fonction limite $f(x)$. La notion la plus évidente porte le nom *convergence ponctuelle* ou *convergence simple.*

On la définit maintenant, en supposant que les fonctions f_n et f sont toutes définies sur un intervalle $[a, b]$ (pour faire simple).

Définition On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement (ou ponctuellement) vers la fonction limite f sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si, pour chaque $x \in [a, b]$, la suite de nombres réelles $(f_n(x))$ converge vers la limite $f(x)$.

Définition On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement (ou ponctuellement) vers la fonction limite f sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si, pour chaque $x \in [a, b]$, la suite de nombres réelles $(f_n(x))$ converge vers la limite $f(x)$.

Alors la convergence simple de (f_n) vers f se caractérise par :

$$\forall x \in [a, b], \, \forall \epsilon > 0 \, \exists N = N(x, \epsilon) \text{ tq } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Il est important de noter que le N ici dépendra, en général, non seulement de ϵ, mais aussi de x.

Exemple On prend $[a, b] = [0, 1]$ et

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$$

Pour chaque $x \in [0, 1]$ fixé, la suite dont les termes sont

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$$

converge vers e^{-x}.

Conclusion : la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

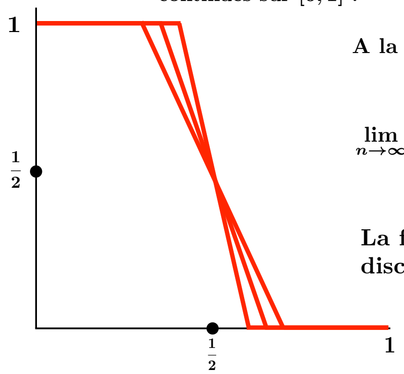
Beaucoup de questions peuvent être posées concernant divers aspects de la convergence des suites de fonctions. On va focaliser sur les deux suivantes :

Q1 : Si les termes f_n de la suite sont des fonctions continues sur $[a,b]$, et si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f, est-il forcément le cas que la fonction f est continue ?

Q2 : Est-il vrai que $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$?

En 1821, Cauchy a publié un article affirmant que la réponse à Q1 est OUI. C'est faux.

On définit une suite de fonctions continues sur $[0,1]$:



A la limite :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

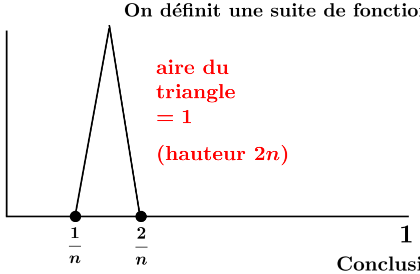
La fonction limite f est alors discontinue en $x = \frac{1}{2}$

Q2 : Est-il vrai que $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$?

Peaufinons la question : si toutes les fonctions concernées sont continues, incluant f, et si les f_n converge simplement vers f, a-t-on forcément

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx\ ?$$

On définit une suite de fonctions continues sur $[0,1]$:



On a $f_n(0) = 0\ \forall n$, donc $f_n(0) \to 0$.

Pour $x > 0$, on a, pour tout n assez grand, $\frac{2}{n} < x$, donc $f_n(x) = 0$; alors $f_n(x) \to 0$.

Conclusion : La suite (f_n) converge simplement vers la fonction limite $f \equiv 0$.

Toutes ces fonctions sont continues.

Pourtant, on a $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ et $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

La convergence simple n'est pas adéquate pour fournir des réponses positives à Q1 et Q2. On introduit une notion plus forte de convergence, la convergence uniforme.

Définition On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement (ou ponctuellement) vers la fonction limite f sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si, pour chaque $x \in [a,b]$, la suite de nombres réelles $(f_n(x))$ converge vers la limite $f(x)$.

Rappel

Alors la convergence simple de (f_n) vers f se caractérise par :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall \epsilon > 0\ \exists N = N(x,\epsilon) \text{ tq } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Définition On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction limite f sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \text{ tq } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall x \in [a,b].$$

c-à-d, le N ne dépend pas de x, seulement de ϵ, et le même N marche pour tous les x dans $[a,b]$.

Il vient au même de dire :

$$\underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_{C[a,b]} \text{ ou } \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]}} \to 0.$$

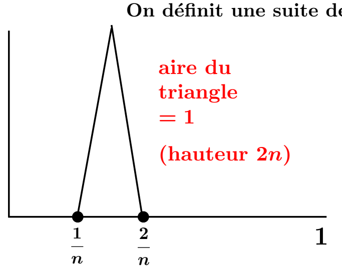
Définition On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction limite f sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \text{ tq } n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall x \in [a,b].$$

Il vient au même de dire :

la norme infinie $\quad \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} := \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$

On définit une suite de fonctions continues sur $[0,1]$:



On a $f_n(0) = 0\ \forall n$, donc $f_n(0) \to 0$.

Pour $x > 0$, on a, pour tout n assez grand, $\frac{2}{n} < x$, donc $f_n(x) = 0$; alors $f_n(x) \to 0$.

Rappel

Conclusion : La suite (f_n) converge simplement vers la fonction limite $f \equiv 0$.

Toutes ces fonctions sont continues.

Ici on a $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 2n \not\to 0$.

La convergence est simple, n'est pas uniforme

Exemple On prend $[a,b] = [0,1]$ et

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$$

Pour chaque $x \in [0,1]$ fixé, la suite dont les termes sont

Rappel

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$$

converge vers e^{-x}.

Conclusion : la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Ici on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|ne^{-x} + x^2 - e^{-x}(n+x)|}{n+x} = \frac{|x^2 - e^{-x}x|}{n+x} \leq \frac{1+1}{n}$$

quelque soit $x \in [0,1]$.

D'où $\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{2}{n}$.

Puisque $\frac{2}{n} \to 0$, on a que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} - e^{-x}\right| \\
&= \left|\frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} - e^{-x}\frac{n+x}{n+x}\right| \\
&= \left|\frac{ne^{-x} + x^2 - e^{-x}(n+x)}{n+x}\right| \\
&= \frac{|x^2 - e^{-x}x|}{n+x} \leq \frac{1+1}{n}
\end{aligned}$$

car, pour $x \in [0,1]$, le numérateur de l'avant-dernier terme satisfait

$$|x^2 - e^{-x}x| \leq x^2 + |e^{-x}x| \leq 1+1$$

et le dénominateur satisfait $n + x \geq n$.

La notion de convergence uniforme permet de répondre positivement aux questions Q1 et Q2 :

Théorème Si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers la fonction limite f sur l'intervalle $[a,b]$, alors f est continue. En outre, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(l'intégrale de la limite est la limite des intégrales)

Démonstration Montrons que f est continue en un point $\bar{x}$ de $[a,b]$.

Pour x quelconque dans $[a,b]$ on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(\bar{x})| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})| \\
&\leq 2 \sup_{y \in [a,b]} |f(y) - f_n(y)| + |f_n(x) - f_n(\bar{x})| \\
&= 2\|f - f_n\| + |f_n(x) - f_n(\bar{x})|.
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$ donné. On choisit en premier n tel que $\|f - f_n\| < \frac{\epsilon}{3}$, et ensuite $r > 0$ tel que $|x - \bar{x}| < r \implies |f_n(x) - f_n(\bar{x})| < \frac{\epsilon}{3}$.

Il en résulte

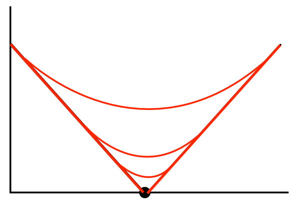
$$|x - \bar{x}| < r \implies |f(x) - f(\bar{x})| < 2 \times \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

d'où la continuité de f en $\bar{x}$.

La convergence des intégrales suit de :

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|(b-a) \to 0.$$

On remarque que la convergence, même uniforme, de f_n vers f n'implique rien sur la convergence des dérivées f_n' (lorsque celles-ci existent).



Les f_n sont très régulières, mais la limite f n'est pas dérivable

Pour avoir des conclusions concernant f', il faut des hypothèses sur la convergence des f_n' ; le prochain résultat est une illustration.

Corollaire Soit (f_n) une suite de fonctions dans $C^1(\mathbb{R})$ telle que :

(a) La suite (f'_n) des dérivées converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction continue g ;

(b) La suite $(f_n(a))$ converge vers une limite $f_0 \in \mathbb{R}$.

Alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f telle que $f(a) = f_0$ et $f' = g$ dans $]a,b[$. On a alors

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \ \forall\, x \in [a,b].$$

(la dérivée de la limite est la limite des dérivées)

Démonstration On écrit, pour un $x \in]a,b]$ quelconque :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\, dt.$$

On observe que la limite lorsque $n \to \infty$ existe à droite ; en notant $f(x)$ la limite à gauche, on obtient

$$f(x) = f_0 + \int_a^x g(t)\, dt.$$

Il vient que $f(a) = f_0$ et $f' = g$. Ensuite, on découvre, pour un $x \in]a,b]$ quelconque :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(a) - f_0| + \int_a^x |f'_n(t) - g(t)|\, dt \\ &\le |f_n(a) - f_0| + (b-a)\|f'_n - g\|, \end{aligned}$$

ce qui implique la convergence uniforme de (f_n) vers f. ■

Suites, séries, et intégrales dépendant d'un paramètre

2. Séries

On a étudié la convergence d'une série $\sum u_n$. On va maintenant supposer qu'elle dépend d'un paramètre x ; on a donc

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_n(x),$$

ce qui est appelée une *série de fonctions.*

On va prendre $x \in [a,b]$ (pour faire simple), en supposant que la série $\sum u_n(x)$ converge pour chaque x. (Donc $S(x)$ a un sens.)

Première question : si chaque $u_n(\cdot)$ est une fonction continue sur $[a,b]$, ce que nous supposons toujours, en est-il de même de la somme $S(x)$?

Sans surprise, la réponse est non. Raison : les sommes partielles

$$S_N(x) = \sum_{i=1}^{N} u_n(x),$$

qui sont visiblement continues, convergent vers $S(x)$, mais cette convergence peut ne pas être uniforme...

La convergence normale (ou dominée) d'une série de fonctions

Définition Lorsqu'il existe une série convergente $\sum v_n$ telle que

$$|u_n(x)| \le v_n \text{ pour tout } x \in [a,b] \text{ et pour tout } n,$$

on dit que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge *normalement* sur $[a,b]$.

Théorème Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues qui converge normalement sur $[a,b]$. Alors la somme $S(x)$ définie une fonction continue sur $[a,b]$.

Démonstration On a la convergence simple (et absolue) de la suite des sommes partielles $S_N(x)$ (qui sont des fonctions continues) vers $S(x)$ (par comparaison). Il suffit de prouver que la convergence est uniforme (ce qui donne la continuité de $x \mapsto S(x)$).

On a

$$\sup_{x\in[a,b]} |S_N(x) - S(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\sum_{N+1}^{\infty} u_n(x)\right| \le \sum_{N+1}^{\infty} v_n\,,$$

un terme qui tend vers 0 lorsque $N \to \infty$ (puisque la série numérique positive $\sum v_n$ converge). ■

Corollaire Sous les hypothèses du théorème, on peut intégrer la série terme par terme :

$$\int_a^b S(x)\,dx \;=\; \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

(l'intégrale de la somme est la somme des intégrales)

(La démonstration est similaire à celle du cas des limites, donnée ci-dessus.)

Comme pour les suites, c'est la convergence uniforme *des dérivées* d'une série qui garantit que la somme est dérivable. Dans le résultat suivant, comme dans le théorème précédent, l'uniformité est fourni par la convergence dite normale.

Théorème Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continûment dérivables telle que la série $\sum u_n(a)$ converge, et telle que la série $\sum u_n'(x)$ converge normalement sur $[a,b]$. Alors la somme $S(x) = \sum u_n(x)$ définit une fonction dérivable sur $]a,b[$, et on a

$$S'(x) \;=\; \sum u_n'(x) \quad \forall x \in]a,b[.$$

(la dérivée de la somme est la somme des dérivées)

(La démonstration est similaire à celle du cas des limites.)

Remarque : la fonction f suivante est bien définie et continue, car la série converge normalement (c'est clair) :

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(2^{2n}\pi x\right) \qquad (\text{où } |a| < 1)$$

Pourtant, on peut montrer qu'elle n'admet de dérivée en aucun point de R !

C'est un célèbre exemple dû à Weierstrass.

Suites, séries, et intégrales dépendant d'un paramètre

3(a). Intégrales dépendant d'un paramètre

La convergence normale (ou dominée) d'une intégrale généralisée (impropre)

On s'intéresse à une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre:

$$I(x) \;=\; \int_0^{\infty} f(x,t)\,dt.$$

On suppose que $x \in [a,b]$ (pour faire simple), et que f est une fonction continue des deux variables.

Définition Si $|f(x,t)| \le g(t)$ $\forall t \in [0,\infty[$ et $x \in [a,b]$, où g est une fonction continue et positive sur $[0,\infty[$ et où l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\infty} g(t)\,dt$ converge, alors on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x,t)\,dt$ converge normalement pour $x \in [a,b]$.

Théorème Soit $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x,t)\,dt$ une intégrale qui converge normalement sur $[a,b]$. Alors $I(x)$ définit une fonction continue sur $[a,b]$.

Rq : On a le même théorème pour l'intégrale propre $\displaystyle\int_c^d f(x,t)\,dt$.

Pour la propriété analogue des dérivées, on suppose en outre que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe et est continue en (x,t). Alors on a

Théorème Si l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge normalement sur $[a,b]$, et l'intégrale $\int_0^\infty f(a,t)\,dt$ est convergente, alors

$$I(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt$$

définit une fonction dérivable sur $]a,b[$, et l'on a

$$I'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \quad \forall x \in]a,b[.$$

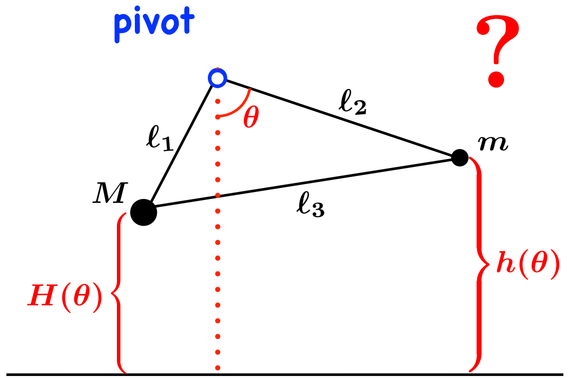
(la dérivée de l'intégrale est l'intégrale de la dérivée ; on peut dériver sous le signe intégrale)

Rq : en fait, $I(\cdot)$ est de classe C^1 sur $]a,b[$.

Rq : On a le même théorème pour l'intégrale propre $\int_c^d f(x,t)\,dt$.

Suites, séries, et intégrales dépendant d'un paramètre

3(b). Intégrales dépendant d'une fonction

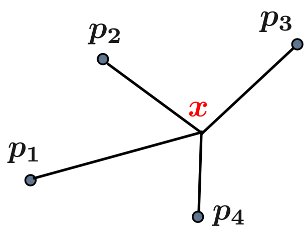


À l'équilibre, l'angle θ sera celui qui minimise la fonction $f(\theta) := MH(\theta) + mh(\theta)$

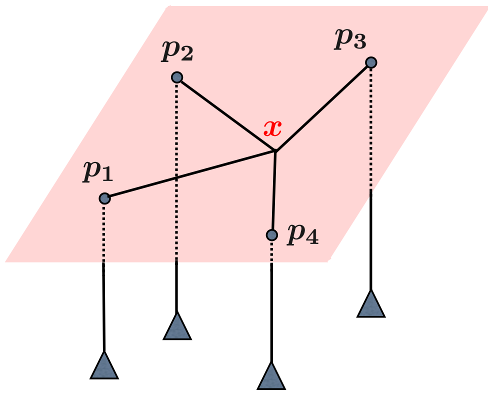
(Euler, d'Alembert...)

Exemple : Problème de Torricelli / Steiner, n = 4

On cherche le point x central par rapport à p_1, p_2, p_3, p_4 : x minimise $|p_1 - x| + |p_2 - x| + |p_3 - x| + |p_4 - x|$



Solution par mobilier :



A l'équilibre, le point x minimise l'énergie potentielle du système (principe de d'Alembert)

En 1744 démarre un nouveau sujet :

optimisation continue

optimisation par rapport aux fonctions

optimisation en dimension infinie

optimisation des intégrales

calcul des variations

(c'est une des grandes idées du cours)

Leonhard Euler

1707-1783

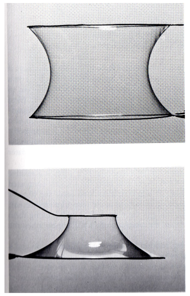
Optimisation

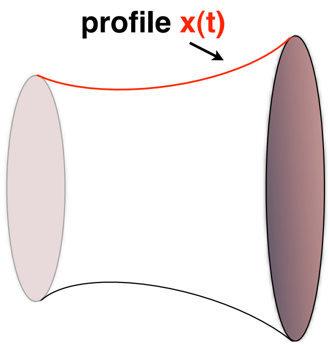
Rien se passe dans l'univers sans qu'un principe de maximum ou de minimum soit concerné.

Leonhard Euler

Cette phrase paraît dans la célèbre monographie de Euler de 1744, concernant l'optimisation dans le cas où les inconnues sont des fonctions (des courbes).

Un exemple de Euler





aire de la surface

$$\min_{x(\cdot)} \int_a^b x(t)\sqrt{1+x'(t)^2}\,dt \rightarrow \text{minimiser}$$

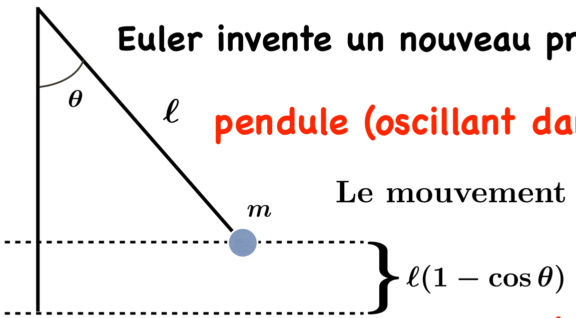
Monographie de 1744 :

Méthodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu

Le problème de base en *calcul des variations* :

$$\min\ J(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt\ :\ x(a) = A,\ x(b) = B$$

Euler définit le problème, trouve la condition nécessaire de base, introduit la technique des multiplicateurs, formule le principe de moindre action, et donne 100 exemples.



Euler invente un nouveau principe dynamique

pendule (oscillant dans le plan)

Le mouvement observé : $\theta(t)$

On définit l'action:

$$K - V = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \underbrace{\tfrac{1}{2} m\, (\ell\theta'(t))^2}_{\text{énergie cinétique}} - \underbrace{mg\ell(1-\cos\theta(t))}_{\text{énergie potentielle}} \Big\}\, dt$$

Alors le mouvement est celui qui minimise l'action :
principe du moindre action

Le problème de base en calcul des variations

Minimiser

$$J(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt$$

sous les contraintes

$$x(a) = A,\ x(b) = B.$$

$$\min_{x(\cdot)} \int_a^b x(t)\sqrt{1 + x'(t)^2}\, dt \quad \Rightarrow \quad L(t,x,v) = x\sqrt{1+v^2}$$

$$K - V = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \tfrac{1}{2} m\, (\ell\theta'(t))^2 - mg\ell(1-\cos\theta(t)) \right\} dt$$

$$\Rightarrow \quad L(t,x,v) = \tfrac{1}{2} m\, (\ell v)^2 - mg\ell(1-\cos x)$$

On prend les fonctions $x(\cdot)$ dans $C^2[a,b]$, et on suppose que L est de classe C^3.

Le problème de base (P) en calcul des variations :

$$\text{minimiser}\quad J(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\, dt$$

$$\text{s.l.c. } x \in C^2[a,b],\quad x(a) = A,\quad x(b) = B.$$

Le problème de base (P), comme tout problème d'optimisation, se prête à l'approche déductive, et à diverses approches inductives (notamment la convexité)

On focalise sur la condition nécessaire principale : l'équation d'Euler

Le suivant donne la première condition nécessaire qu'une solution x_* doit satisfaire.

Notation: Les dérivées partielles de la fonction $L(t,x,v)$ par rapport à x et v sont notées L_x et L_v.

Théorème (Euler 1744)

Si x_* est solution de (P), alors x_* satisfait *l'équation d'Euler* :

$$\frac{d}{dt}\Big\{ L_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big)\Big\} = L_x\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Une fonction $x_* \in C^2[a,b]$ qui satisfait l'équation d'Euler est appelée une *extrémale*.

$$x_* \text{ minimise } \; f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

(règle de Fermat)

$$\nabla f(x_*) = 0$$

$$x_* \text{ minimise } \; J(x) := \int_a^b L\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt$$

(équation d'Euler)

$$\frac{d}{dt}\Big\{ L_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big)\Big\} = L_x\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) \quad \forall\, t \in [a,b].$$

La preuve de Euler passe par la discrètisation, mais l'approche de Lagrange utilise les *variations* (d'où le nom du sujet). Ici, une variation veut dire une fonction $y \in C^2[a,b]$ telle que $y(a) = y(b) = 0$.

On fixe une telle variation y, et on considère la fonction g d'une seule variable suivante :

$$g(\lambda) \;=\; J(x_* + \lambda y) \;=\; \int_a^b L\big(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y'\big)\, dt.$$

(Observer que certains arguments sont omis, pour alléger la notation.)

Il suit que g est dérivable, et que "la dérivée de l'intégrale est l'intégrale de la dérivée" :

$$g'(\lambda) \;=\; \int_a^b \big[\, L_x\big(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y'\big)\, y + L_v\big(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y'\big)\, y' \,\big]\, dt.$$

On remarque pour chaque λ, la fonction $x_* + \lambda y$ est admissible pour (P), d'où

$$g(\lambda) \;=\; J(x_* + \lambda y) \;\geqslant\; J(x_*) \;=\; g(0).$$

Il suit que g atteint un minimum en $\lambda = 0$. Par la règle de Fermat, $g'(0) = 0$; par conséquent :

$$\int_a^b [\alpha(t)\, y(t) + \beta(t)\, y'(t)]\, dt \;=\; 0,$$

où nous avons posé

$$g'(\lambda) \;=\; \int_a^b \big[\, L_x\big(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y'\big)\, y + L_v\big(t, x_* + \lambda y, x_*' + \lambda y'\big)\, y' \,\big]\, dt.$$

$$\alpha(t) \;:=\; L_x\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big), \quad \beta(t) \;:=\; L_v\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big).$$

On invoque l'intégration par parties pour déduire

$$\int_a^b [\alpha(t) - \beta'(t)]\, y(t)\, dt \;=\; 0.$$

Puisque ceci a lieu pour toute variation y, il suit que la fonction (continue) qui est le coéfficient de y doit s'annuler identiquement sur $[a,b]$. Mais c'est exactement la conclusion recherchée.

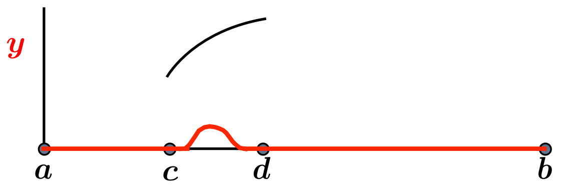
Lemme. Supposons que la fonction F satisfait

$$\int_a^b F(t)y(t)\,dt \;=\; 0$$

pour toute variation y. Alors F est identiquement zéro.

Démonstration.

Par l'absurde : si $F \not\equiv 0$, il existe un sous-intervalle $[c,d]$ sur lequel $F > 0$ (disons). Alors on construit une variation y telle que $\int_a^b F(t)y(t)\,dt \neq 0$:



Exo en CM : Ecrire l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dt}\{\,L_v(t,x_*(t),x_*'(t))\} \;=\; L_x(t,x_*(t),x_*'(t))$$

lorsqu'il s'agit de minimiser

$$\int_0^1 \left(x(t)^2 + x'(t)^2\right) dt \;\text{ s.l.c. }\; x(0)=0,\; x(1)=1.$$

Résoudre si possible.

$$L(t,x,v) = x^2 + v^2\,;\;\; L_v = 2v\,;\;\; L_x = 2x$$

forme développée

$$\Longrightarrow\; \frac{d}{dt}\{2x'\} = 2x \qquad \Longrightarrow\; x'' = x$$

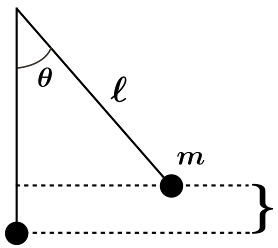
forme initiale

$$\Longrightarrow\; x(t) = ce^t + ke^{-t}$$

$$\Longrightarrow\; x(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^1 - e^{-1}}$$

le pendule

$$\min \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{m\ell^2}{2}\theta'(t)^2 - mg\ell(1-\cos\theta(t)) \right\} dt$$



Ici on a

$$L(t,x,v) = \frac{m\ell^2}{2}v^2 + mg\ell\cos x - mg\ell\,,$$

d'où $L_v = m\ell^2 v$, $L_x = -mg\ell\sin x$.

L'équation d'Euler devient

$$\frac{d}{dt}\{m\ell^2\theta'\} = -mg\ell\sin\theta$$

$$\Longrightarrow\; \theta''(t) + (g/\ell)\sin\theta = 0.$$

On ne sait pas écrire sa solution.

(Mais si θ est petit, on remplace $\sin\theta$ par θ, et alors l'équation différentielle est linéaire...)

Retour à la pellicule savonneuse, où

$$L(t,x,v) = x\sqrt{1+v^2}.$$

L'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left\{ \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{1+x'(t)^2}} \right\} \;=\; \sqrt{1+x'(t)^2}.$$

Sa résolution n'est pas évidente.

Corollaire (condition de Erdmann) Si x_* est solution locale du problème de base, et si L est autonome (ne dépend pas de t), alors il existe une constante c telle que

$$L(x_*(t), x_*'(t)) - x_*'(t)L_v(x_*(t), x_*'(t)) \;=\; c \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Démonstration.

On dérive le côté gauche par rapport à t :

$$\begin{aligned} &= L_x(*)x_*' + L_v(*)x_*'' - x_*''L_v(*) - x_*'\frac{d}{dt}L_v(*) \\ &= L_x(*)x_*' - x_*'L_x(*) \;=\; 0 \end{aligned}$$

∎

Rq : on obtient ainsi une "première intégrale" de l'équation de Euler (dans le cas autonome)

Retour à la pellicule savonneuse, où $L(t,x,v) = x\sqrt{1+v^2}$.

Puisque le problème est autonome, la condition d'Erdmann s'applique :

$$\begin{aligned} L - x'L_v = c \implies & \; x\sqrt{1+x'^2} - x'\frac{xx'}{\sqrt{1+x'^2}} = c \\ \implies & \; \frac{x}{\sqrt{1+x'^2}} = c \implies x'^2 = \frac{x^2}{c^2} - 1 \\ \implies & \; cx' = \sqrt{x^2 - c^2} \end{aligned}$$

(en supposant $x' > 0$ pour simplicité).

Cette edo est séparable :

$$c\frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}} = dt \implies \int c\frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}} \;=\; \int dt$$

On a alors

$$c\cosh^{-1}(x/c) = t + k \implies \boxed{x_*(t) \;=\; c\cosh\left(\frac{t+k}{c}\right)}.$$

Cette courbe porte le nom *caténaire* (ou *chaînette*).

une méthode inductive

Une méthode inductive nous est disponible : la convexité (inconnue de nos illustres ancêtres)

Définition On dira que le problème de base (P) est convexe lorsque, pour chaque $t \in [a,b]$, la fonction $(x,v) \mapsto L(t,x,v)$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème Si x_* est une extrémale admissible pour (P), et si la fonction $(x,v) \mapsto L(t,x,v)$ est convexe pour chaque $t \in [a,b]$, alors x_* est solution globale de (P).

Exemple Pour

$$\min \int_0^1 \left(x(t)^2 + x'(t)^2\right) dt \quad \text{s.l.c.} \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1,$$

on a vu qu'il y a un seul candidat, la fonction

$$x_*(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^1 - e^{-1}}\,.$$

La fonction $(x,v) \mapsto L(x,v) = x^2 + v^2$ est visiblement convexe. Donc ce problème est convexe, et le candidat est l'unique solution, un minimum global.

Théorème Si x_* est une extrémale admissible pour (P), et si la fonction $(x,v) \mapsto L(t,x,v)$ est convexe pour chaque $t \in [a,b]$, alors x_* est solution globale de (P).

Démonstration On pose (en utilisant le fait que x_* est une extrémale)

$$p(t) = L_v(t, x_*, x'_*),\ \ p'(t) = L_x(t, x_*, x'_*).$$

Soit $x \in C^2[a,b]$ une fonction admissible pour (P). Alors

$$\begin{aligned} J(x) - J(x_*) &= \int_a^b \{L(t,x,x') - L(t,x_*,x'_*)\}\,dt \\ &\geqslant \int_a^b (p',p) \bullet (x - x_*, x' - x'_*)\,dt \end{aligned}$$

(par l'inégalité sous-différentielle, puisque $(p',p) = \nabla_{x,v} L(t,x_*,x'_*)$)

$$= \int_a^b (d/dt)\{p \times (x - x_*)\}\,dt \ = \ 0,$$

puisque x et x_* ont les mêmes valeurs en a et b. □

Il faut savoir écrire l'équation d'Euler
(parfois on peut même la résoudre)

méthode :

1. écrire $L(t,x,v)$
2. calculer $L_x(t,x,v)$ et $L_v(t,x,v)$
3. remplacer (t,x,v) par (t,x,x') ci-dessus et écrire :

$$\frac{d}{dt}\{L_v(t,x,x')\} = L_x(t,x,x') \quad t \in [a,b]$$

la forme initiale ; on développe
la dérivée à gauche pour
obtenir la forme développée

exemple

1. écrire $L(t,x,v)$
2. calculer $L_x(t,x,v)$ et $L_v(t,x,v)$
3. remplacer (t,x,v) par (t,x,x') ci-dessus et écrire :

$$\frac{d}{dt}\{L_v(t,x,x')\} = L_x(t,x,x') \quad t \in [a,b]$$

$$\int_a^b (x'^2 + 4tx' + x^2)\,dt \ \Rightarrow \ ?$$ (éqn d'Euler)

$$\begin{aligned} L(t,x,v) &= v^2 + 4tv + x^2 \\ L_x(t,x,v) &= 2x \\ L_v(t,x,v) &= 2v + 4t \end{aligned}$$

forme initiale $\dfrac{d}{dt}\{2x' + 4t\} = 2x \quad t \in [a,b]$

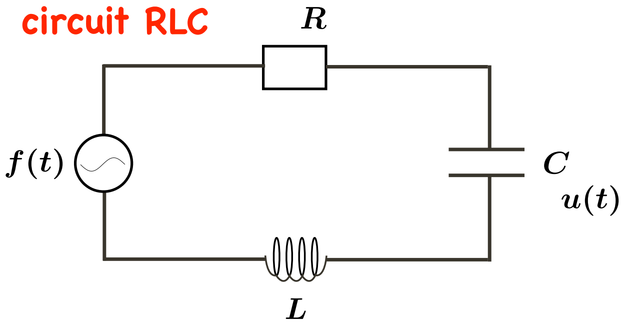
forme développée $x'' - x = -2$

Rappel :

les équadiff linéaire d'ordre deux
à coefficients constants

$$Ly := y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = f(x)$$

Exemple : circuit RLC



$$L\,u'' + R\,u' + \frac{1}{C}\,u \;=\; \frac{1}{C}\,f(t)$$

$$L\,y''(x) + R\,y'(x) + \frac{1}{C}\,y(x) \;=\; \frac{1}{C}\,f(x)$$

Notre but est de décrire la solution générale de l'équadiff

$$Ly \;=\; y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) \;=\; f(x)$$

On suppose que f (le second membre) est continue

On commencé par le cas homogène

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) \;=\; 0$$

Résumé du cas homogène

Théorème. (Euler 1743) L'espace vectoriel E des solutions (réelles) y de l'equation différentielle

$$Ly \;=\; y'' + p\,y' + qy \;=\; 0$$

est de dimension deux. Une base (dite canonique) $\{\,y_1\,,\,y_2\,\}$ pour E est disponible en fonction des racines du polynôme caractéristique $P(x) \;:=\; x^2 + p\,x + q$. Soit $\Delta \;:=\; p^2 - 4q$ le discriminant de P.

Pour $\Delta > 0$, on a $y_1(t) \;=\; e^{\alpha t}$, $y_2(t) \;=\; e^{\beta t}$
où α et β sont les racines (réelles et distinctes) de P ;

Pour $\Delta < 0$, on a $y_1(t) \;=\; e^{rt}\cos st$, $y_2(t) \;=\; e^{rt}\sin st$
où $r \pm si$ sont les racines (conjuguées) de P ;

Pour $\Delta \;=\; 0$ on a $y_1(t) \;=\; e^{rt}$, $y_2(t) \;=\; te^{rt}$
où r (réel) est l'unique racine de P.

Le cas non homogène

Retour maintenant à l'équation non homogène

$$Ly \;=\; y'' + p\,y' + qy \;=\; f$$

(on dit aussi *avec second membre*), où f peut être différent de zéro.

Soit y_* une *solution particulière* de l'équation différentielle non homogène $Ly = f$; c-à-d, une fonction qui satisfait $Ly_* = f$, mais sans forcément respecter les conditions au bord que nous voulons imposer.

On voit maintenant qu'il suffit de connaître *une* solution particulière y_* de $Ly = f$, ainsi que les deux solutions canoniques y_1, y_2 de l'équation homogène associée, afin de pouvoir accéder à *toutes* les solutions de $Ly = f$.

Le plus souvent, on trouve la solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés

Théorème.
Soit y_* une solution particulière de $Ly = f$. Soient y_1, y_2 les deux solutions canoniques de l'équation homogène associée (c-à-d, $Ly = 0$). Alors les solutions de $Ly = f$ consiste exactement des fonctions y ayant la forme

$$y = y_* + c\,y_1 + k\,y_2$$

pour deux constantes réelles c, k (qui sont souvent déterminées par des conditions au bord).

exemple Trouver la solution de $x'' - x = 0$ qui satisfait $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

Le polynôme caractéristique $r^2 - 1$ admet comme racines ± 1, donc $x(t)$ est de la forme $ce^t + de^{-t}$.

$$x(0) = 0 \implies c + d = 0$$

$$x(1) = 1 \implies ce + de^{-1} = 1$$

On trouve $c = \dfrac{1}{e - e^{-1}}$ et $d = \dfrac{-1}{e - e^{-1}}$,

d'où $x(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}$

exemple Trouver la solution de $x'' - x = t$ qui satisfait $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

Le polynôme caractéristique $r^2 - 1$ admet comme racines ± 1, donc $x(t)$ est de la forme $ce^t + de^{-t} + x_p(t)$, où x_p est une solution particulière.

On constate que la fonction $x_p(t) = -t$ est une solution particulière.

$$x(0) = 0 \implies c + d = 0$$

$$x(1) = 1 \implies ce + de^{-1} - 1 = 1$$

On trouve $c = \dfrac{2}{e - e^{-1}}$ et $d = \dfrac{-2}{e - e^{-1}}$,

d'où $x(t) = 2\dfrac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}} - t$

Théorème

On considère l'équation différentielle $Ly = f$, où $f(x)$ est une fonction de la forme

$$e^{rx} Q(x) \cos sx \quad \text{ou} \quad e^{rx} Q(x) \sin sx\,,$$

Q étant est un polynôme, et où $r + is$ n'est *pas* une racine caractéristique. Alors il existe une solution particulière de la forme

$$e^{rx} \{Q_1(x) \cos sx + Q_2(x) \sin sx\}\,,$$

où Q_1 et Q_2 sont des polynômes du même degré que Q. Si $r + is$ est une racine caractéristique, il existe une solution particulière de la forme

$$x^m e^{rx} \{Q_1(x) \cos sx + Q_2(x) \sin sx\}\,,$$

où m est la multiplicité de la racine (donc, $m = 1$ ou 2).

Comment trouver une solution particulière y_* de

$$Ly = y'' + py' + qy = f$$

par la méthode des coefficients indéterminés.

Sauf dans un cas exceptionnel, on cherche une solution particulière y_* de la forme :

$f(x) =$ polynôme de degré $n \implies y_* =$ polynôme de degré n

$f(x) = Ae^{ax} \implies y_*(x) = Be^{ax}$

$f(x) = A\sin(ax)$ ou $A\cos(ax) \implies y_*(x) = B\sin(ax) + C\cos(ax)$

$f(x) =$ somme de tels $f_i \implies y_* =$ somme de tels y_{*i}

Exemple : pour $f(x) = x^2 + e^{-x} + \sin x$, on cherche y_* de la forme

$$y_*(x) = Ax^2 + Bx + C + De^{-x} + E\sin x + F\cos x$$

résumé

Suites, séries, et intégrales dépendant d'un paramètre

- **Suites de fonctions** $\quad f(x) = \lim f_n(x)$

  Convergence simple et uniforme ; continuité ;

  Critères pour $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$ et $f'(x) = \lim f_n'(x)$

- **Séries de fonctions** $\quad S(x) = \sum u_n(x)$

  Convergence normale ; continuité

  Critères pour $\displaystyle\int_a^b S(x)\,dx = \sum \int_a^b u_n(x)\,dx$ et $S'(x) = \sum u_n'(x)$

- **Intégrales dépendant d'un paramètre** $\quad \displaystyle I(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt$ ou $\displaystyle\int_c^d f(x,t)\,dt$

  Convergence normale ; continuité de $I(\cdot)$

  Critère pour $\displaystyle I'(x) = \int_0^\infty \frac{d}{dx} f(x,t)\,dt$

- **Intégrales dépendant d'une fonction : calcul des variations** $\quad$ Problème de base

  Equation d'Euler

Fin des diapos du 11-ième cours