

# Analyse III

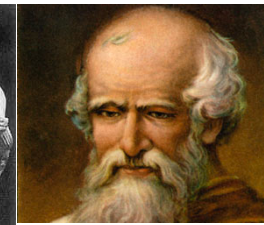
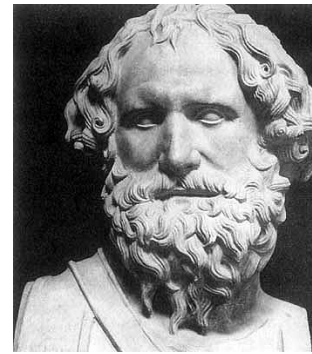
## Fonctions de plusieurs variables

MAT2019L séquence 4

CM1

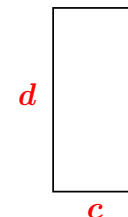
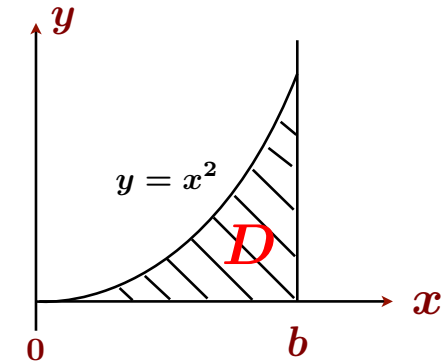
automne 2017  
cours de  
Francis Clarke

## Rappel sur l'intégration



Archimède  
(3 siècles  
av. J-C)

Problème :  
calculer  
l'aire sous  
la parabole



On connaît l'aire d'un rectangle

$$\text{Aire} = cd$$

La méthode d'exhaustion de Archimède  
consiste à approximer le domaine D par  
une collection de rectangles.

Pour cela, on introduit la notion  
de subdivision d'un intervalle

Soit  $N \in \mathbb{N}_*$ . On considère la **subdivision uniforme**

$$(0, \frac{b}{N}, 2\frac{b}{N}, \dots, (N-1)\frac{b}{N}, b)$$

de l'intervalle  $[0, b]$ , qui est de **pas**  $b/N$ . On note par

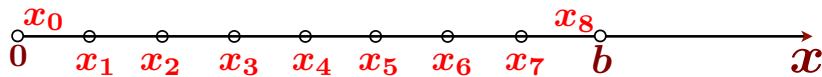
$$x_i := i \frac{b}{N} \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

les **nœuds** de la subdivision. Donc  $x_0 = 0$  et  $x_N = b$ .  
On note aussi

$$I_i := [x_i, x_{i+1}] = \left[ i \frac{b}{N}, (i+1) \frac{b}{N} \right]$$

les  $N$  sous-intervalles de la subdivision.

**$N = 8$**



5

$$\text{Aire du rectangle basé sur } [x_i, x_{i+1}] = \frac{b}{N} \times \frac{(bi)^2}{N^2} = \frac{b^3 i^2}{N^3}$$

En invoquant la formule *somme des carrés*

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

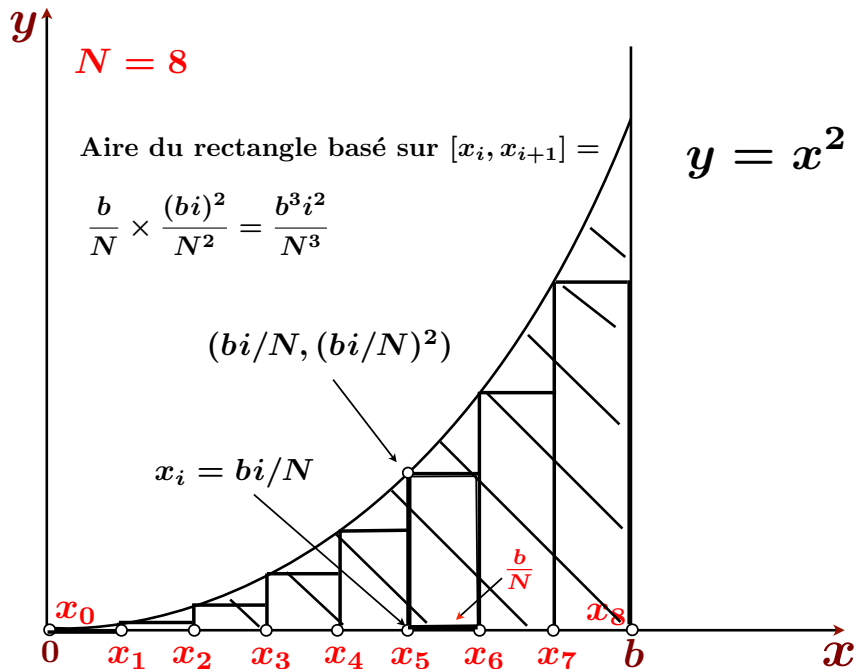
pour  $k = N-1$ , on trouve que l'aire total des rectangles vaut

$$\begin{aligned} & \frac{b^3}{N^3} \{1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2\} \\ &= \frac{b^3}{N^3} \frac{1}{6} (N-1)N(2N-1) \\ &= \frac{b^3}{6N^2} (N-1)(2N-1). \end{aligned}$$

Quand  $N$  devient très grand, le découpage en rectangles est une bonne approximation de la région  $D$  qui nous intéresse.

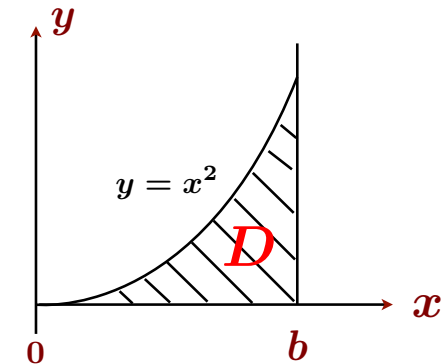
Lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , l'aire des rectangles  $\Rightarrow \left( \frac{b^3}{3} \right)$ .

7



6

**Problème :**  
calculer  
l'aire sous  
la parabole



Le calcul est simple pour nous :

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^b = \frac{b^3}{3}.$$

8

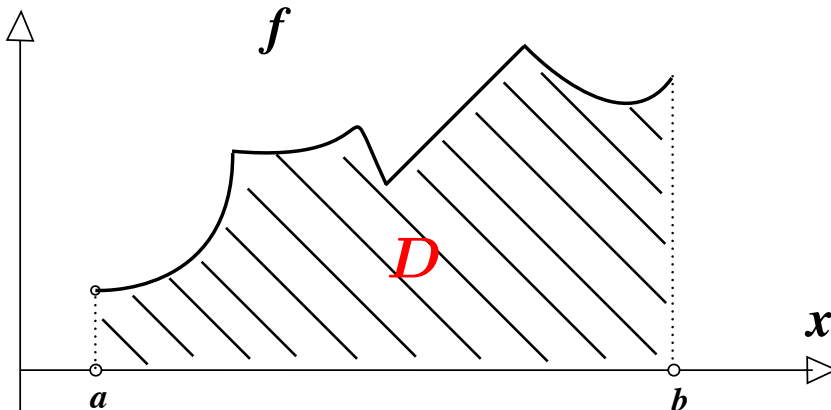
21 siècles plus tard :

## Définition de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction positive sur  $[a, b]$ . On veut que l'intégrale de  $f$ , notée

$$\text{Int}[f] = \int_a^b f(x) dx$$

corresponde à l'aire de la région  $D$  comprise sous le graphe de  $f$ :



$$\text{AIRE} = \text{Int}[f] = \int_a^b f(x) dx$$

9

Soit  $N \in \mathbb{N}_*$ . On considère la subdivision uniforme

$$(a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, \dots, a + (N-1)\frac{b-a}{N}, b)$$

de l'intervalle  $[a, b]$ , qui est de pas  $(b-a)/N$ . On note par

$$x_i := a + i\frac{b-a}{N} \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

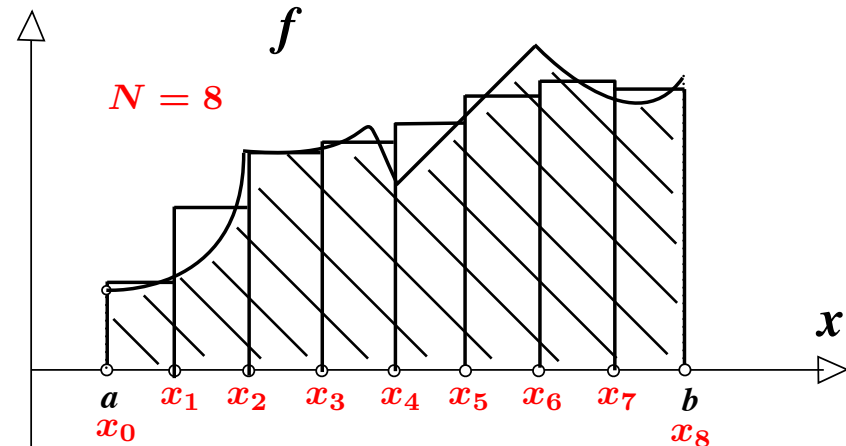
les nœuds de la subdivision. Donc  $x_0 = a$  et  $x_N = b$ .

On note aussi

$$I_i := [x_i, x_{i+1}] = \left[ a + i\frac{b-a}{N}, a + (i+1)\frac{b-a}{N} \right]$$

les  $N$  sous-intervalles de la subdivision.

11



On choisit ensuite un point  $z_i$  dans chaque  $I_i$ , et on pose

$$S_N := \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i) \frac{b-a}{N},$$

une somme de Riemann.

10

12

On a défini des sommes de Riemann

$$S_N := \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i) \frac{b-a}{N}.$$

Lorsque la suite  $S_N$  tend vers une limite finie  $\ell$ , c-à-d quand  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \ell$ , et de façon qui ne dépend pas du choix des  $z_i$ , on dit que  $f$  est *intégrable*, et la valeur de son intégrale est  $\ell$ ; on écrit alors

$$\int_a^b f(x) dx = \ell.$$

S ou  $\Sigma$        $dx \approx x_{i+1} - x_i$

On insiste sur le fait que la limite ne doit pas dépendre du choix des  $z_i$ .

**Un point fondamental est le suivant:  
quand la définition de l'intégrale  
a-t-elle un sens ?**

Il faut que la limite des sommes  $S_N$  existe, indépendamment du choix des  $z_i$ .

**Pour quelles fonctions ?**

**Augustin-Louis Cauchy**



1789 - 1857

Protégé de Lagrange,  
professeur à l'Ecole  
Polytechnique,  
baron, auteur de 800 articles...  
Son nom figure sur la Tour  
Eiffel.

**Mais surtout,  
inventeur de  
l'argument epsilon-  
delta.**

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue**  
en un point  $x$  si :

pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$u \in [a, b], |u - x| < \delta \implies |f(u) - f(x)| < \epsilon.$$

**On dit que "f est continue" lorsque f  
est continue en tout point de  $[a, b]$ .**

## Théorème. (Riemann)

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

C'est-à-dire,  
toute fonction  
continue est  
intégrable  
dans le sens  
de Riemann

17



**BERNHARD  
RIEMANN**

1826-1866

Son nom ne  
figure pas sur  
la Tour Eiffel.

18

**Théorème.** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions continues sur  $[a, b]$ . Alors

1. (**linéarité**)

$$\int_a^b (cf(x) + kg(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx + k \int_a^b g(x) dx.$$

2. (**préservation d'inégalités**)

$$f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

3. (**valeur absolu**)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

4. (**relation de Chasles**) Pour tout  $c \in [a, b]$  on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

19

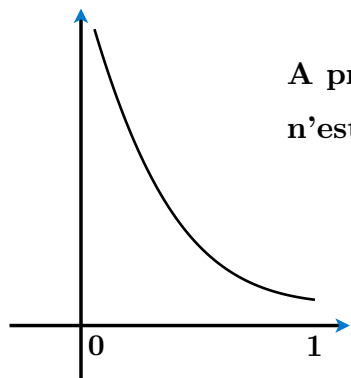
## les intégrales impropres (ou généralisées)

1. Le cas d'une fonction positive

20

Le cadre est celui d'une fonction  $f : ]a, b[ \mapsto \mathbb{R}_+$  qui est continue sur l'intervalle **ouvert**, mais qui peut poser problème en  $a$  et/ou  $b$  (devenir non bornée, voire ne même pas être définie).

Exemple :  $f(t) = \frac{1}{t}$  sur  $]0, 1[$



A priori, l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  n'est pas définie.

Le cadre est celui d'une fonction  $f : ]a, b[ \mapsto \mathbb{R}_+$  qui est continue sur l'intervalle **ouvert**, mais qui peut poser problème en  $a$  et/ou  $b$  (devenir non bornée, voire ne même pas être définie).

On sait que  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $]a, b[$ .

(Par exemple,  $F(x) := \int_c^x f(t) dt$ , où  $c \in ]a, b[$ .)

On sait que pour  $\epsilon > 0$  petit, l'intégrale  $\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t) dt$  est bien définie, et que l'on a

$$\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t) dt = F(b-\epsilon) - F(a+\epsilon).$$

On **définit**

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\epsilon \downarrow 0} F(b-\epsilon) - F(a+\epsilon).$$

Cette limite existe car  $F$  est croissante ( $F' = f \geq 0$ ), mais peut valoir  $+\infty$ .

Terminologie :

Quand  $\int_a^b f(t) dt < +\infty$ , on dit que l'intégrale impropre **converge** ; sa valeur est la limite.

Et on dit que  $f$  (la fonction positive) est **intégrable** sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Quand  $\int_a^b f(t) dt = +\infty$ , on dit que l'intégrale impropre **diverge**, ou **diverge vers  $+\infty$** .

Et on dit que  $f$  n'est pas intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Exemple :  $f(t) = \frac{1}{t}$  sur  $]0, 1[$

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t}$  **diverge vers  $+\infty$**  ;

la fonction  $1/t$  n'est pas intégrable sur  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{t} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \ln t \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} \\ &= \ln 1 - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \ln \epsilon \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Exemple :  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  sur  $]0, 1[$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} 2\sqrt{t} \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} \\ &= 2\sqrt{1} - \lim_{\epsilon \downarrow 0} 2\sqrt{\epsilon} \\ &= 2 \end{aligned}$$

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$  **converge** ; sa valeur est de 2.

la fonction  $1/\sqrt{t}$  est intégrable sur  $[0, 1]$ .

## Exercice :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  un paramètre fixé.

Montrer que l'intégrale impropre  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge

quand  $\alpha < 1$  et diverge quand  $\alpha \geq 1$ .

25

## Exercice :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  un paramètre fixé.

Montrer que l'intégrale impropre  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge

quand  $\alpha < 1$  et diverge quand  $\alpha \geq 1$ .

## Exercice :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  un paramètre fixé.

Montrer que l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge

quand  $\alpha > 1$  et diverge quand  $\alpha \leq 1$ .

27

Une intégrale est aussi impropre quand l'intervalle sous-jacent est non borné (c-à-d,  $a = -\infty$  et/ou  $b = +\infty$ ).

Exemple :  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$

On **définit**  $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(t) dt$ .

Quand  $\int_a^{+\infty} f(t) dt < +\infty$ , on dit que l'intégrale impropre **converge** ; sa valeur est la limite.

Et on dit que  $f$  (la fonction positive) est **intégrable** sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

Quand  $\int_a^{+\infty} f(t) dt = +\infty$ , on dit que l'intégrale impropre **diverge**, ou **diverge vers**  $+\infty$ .

Et on dit que  $f$  n'est pas intégrable sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

**L'exemple ci-dessus :**  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dt}{t} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \ln T = +\infty$ .

Donc l'intégrale diverge vers  $+\infty$ .

26

On peut souvent étudier la convergence d'une intégrale impropre même si une primitive n'est pas disponible. La technique principale est la comparaison.

**Proposition.** Soient  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions continues telles que  $f(x) \leq g(x), \forall x \in ]a, b[$ . Alors :  $\rightarrow = [0, +\infty[$

(a) Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge, il en est de même pour  $\int_a^b f(t) dt$

(b) Si  $\int_a^b f(t) dt$  diverge, il en est de même pour  $\int_a^b g(t) dt$

Exemple :

Preuve : On a  $\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t) dt \leq \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} g(t) dt \dots$

$\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$  converge puisque

$\frac{e^t}{\sqrt{t}} \leq \frac{e}{\sqrt{t}} \forall t \in ]0, 1]$ , et puisque  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$  converge.

28

Exemple : (présentant deux difficultés)

Étudier la convergence de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ .

On aura convergence **ssi** les deux intégrales  $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$   
et  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$  convergent.

La première intégrale converge par comparaison avec  $1/\sqrt{t}$ .

La seconde intégrale converge par comparaison avec  $e^{-t}$ , car

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} -e^{-t} \Big|_1^T < +\infty.$$

29

## Convergence par comparaison locale

On rappelle certaines notions de comparaison locale des fonctions :

On dit qu'un ensemble  $V$  dans  $\mathbb{R}$  est un **voisinage** d'un point  $c$  si, pour un  $\delta > 0$ , il est vrai que

$$V \supset [c - \delta, c + \delta].$$

30

## Convergence par comparaison locale

On rappelle certaines notions de comparaison locale des fonctions :

**Définitions.** Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $c \in \mathbb{R}$  un point.

$f$  est **dominée** par  $g$  autour de  $c \leftrightarrow f(x) = O_c(g(x)) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_c$  de  $c$ ,  $\exists M$  t.q.

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in D \cap V_c.$$

$f$  est **négligeable** devant  $g$  autour de  $c \leftrightarrow f(x) = o_c(g(x)) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_c$  de  $c$ ,  $\exists \epsilon(x)$  t.q.  $\lim_{x \rightarrow c} \epsilon(x) = 0$  et

$$f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \forall x \in D \cap V_c.$$

$f$  est **équivalente** à  $g$  autour de  $c \leftrightarrow f(x) \sim_c g(x) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_c$  de  $c$ ,  $\exists \epsilon(x)$  t.q.  $\lim_{x \rightarrow c} \epsilon(x) = 0$  et

$$f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x) \quad \forall x \in D \cap V_c.$$

31

**Définitions.** Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $c \in \mathbb{R}$  un point.

$f$  est **dominée** par  $g$  autour de  $c \leftrightarrow f(x) = O_c(g(x)) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_c$  de  $c$ ,  $\exists M$  t.q.

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in D \cap V_c.$$

$f$  est **négligeable** devant  $g$  autour de  $c \leftrightarrow f(x) = o_c(g(x)) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_c$  de  $c$ ,  $\exists \epsilon(x)$  t.q.  $\lim_{x \rightarrow c} \epsilon(x) = 0$  et

$$f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \forall x \in D \cap V_c.$$

$f$  est **équivalente** à  $g$  autour de  $c \leftrightarrow f(x) \sim_c g(x) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_c$  de  $c$ ,  $\exists \epsilon(x)$  t.q.  $\lim_{x \rightarrow c} \epsilon(x) = 0$  et

$$f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x) \quad \forall x \in D \cap V_c.$$

**Remarques.**

1. Pour l'étude des intégrales impropres, on aura toujours  $D \supset ]c, c + \delta]$  ou  $D \supset [c - \delta, c[$  ;  $c$ -à-d,  $c$  est *adhérent* à  $D$ .

2. On a  $f(x) \sim_c g(x) \implies f(x) = O_c(g(x))$  et  $f(x) = o_c(g(x)) \implies f(x) = O_c(g(x))$ .

3. *Essentiellement*, on a  $f \sim_c g \iff \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  et

$$f = o_c(g) \iff \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

32



## Rq : Les équivalents sont souvent trouvés à l'aide des DL

**Proposition.** Soit  $f(x) = kx^p + o(x^p)$  le DL d'ordre  $p$  de  $f$  en 0, où  $k \neq 0$ . Alors  $f(x) \sim_0 kx^p$ .

**Preuve.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{kx^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^p + o(x^p)}{kx^p} = 1 \quad \square$$

## Ces notions de comparaison locale s'étendent au cas $c = -\infty$

ou  $c = +\infty$  :

On dit qu'un ensemble  $V$  dans  $\mathbb{R}$  est un **voisinage** de  $+\infty$  si, pour un nombre  $N$ , il est vrai que

$$V \supset [N, +\infty[$$

**Définitions.** Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

$f$  est **dominée** par  $g$  autour de  $+\infty \leftrightarrow f(x) = O_{+\infty}(g(x)) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_{+\infty}$  de  $+\infty$ ,  $\exists M$  t.q.

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in D \cap V_{+\infty}.$$

$f$  est **négligeable** devant  $g$  autour de  $+\infty \leftrightarrow f(x) = o_{+\infty}(g(x)) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_{+\infty}$  de  $+\infty$ ,  $\exists \epsilon(x)$  t.q.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0$  et

$$f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \forall x \in D \cap V_{+\infty}.$$

$f$  est **équivalente** à  $g$  autour de  $+\infty \leftrightarrow f(x) \sim_{+\infty} g(x) \leftrightarrow$

$\exists$  voisinage  $V_{+\infty}$  de  $+\infty$ ,  $\exists \epsilon(x)$  t.q.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0$  et

$$f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x) \quad \forall x \in D \cap V_{+\infty}.$$

**Proposition.** Soient  $f, g, h : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  trois fonctions continues. On suppose que

1)  $f = O_a(g)$  et  $f = O_b(h)$  ;

2) Pour un  $\delta > 0$ ,  $g$  est intégrable sur  $[a, a + \delta]$  et  $h$  est intégrable sur  $[b - \delta, b]$ .

Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

**Rq.** Evidemment on peut remplacer  $f = O_a(g)$  dans l'énoncé par  $f \sim_a g$ .

**"Preuve" :**

$$\int_a^b f(t) dt = \underbrace{\int_a^{a+\delta} f(t) dt}_{\text{converge car } f \text{ dominée par } g} + \underbrace{\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(t) dt}_{\text{existe car } f \text{ est continue}} + \underbrace{\int_{b-\delta}^b f(t) dt}_{\text{converge car } f \text{ dominée par } h}$$

**Rq.** On obtient un résultat analogue quand  $b = +\infty$  (prendre  $[N, +\infty[$  plutôt que  $[b - \delta, b]$ ), ou quand  $a = -\infty \dots$

**Exemple :** Étudier la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin^2(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}}_{=: f(t) \geq 0} dt$$

On pose  $g(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}$ , une fonction intégrable sur  $[0, 1]$ .

On a  $f(t) \leq g(t)$ , d'où  $f = O_0(g)$ .

On sait  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\}$ , par le DL de  $\sin^2 x$  en 0.

$$\sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^{5/2}} \text{ (fonction intégrable sur } [1, +\infty[ \text{ )}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\}}{\frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{t^2}} = 1$$

**Conclusion :**  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  ; l'intégrale converge.

# les intégrales impropres (ou généralisées)

## 2. Le cas d'une fonction à signe variable

Le cadre est celui d'une fonction  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  (pas forcément positive) qui est continue sur l'intervalle **ouvert**, mais qui peut poser problème en  $a$  et/ou  $b$  (devenir non bornée, voire ne même pas être définie).

On sait que  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $]a, b[$ .

On sait que pour  $\epsilon > 0$  petit, l'intégrale  $\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t) dt$  est bien définie, et que l'on a

On **définit**  $\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(t) dt = F(b - \epsilon) - F(a + \epsilon)$ .

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\epsilon \downarrow 0} F(b - \epsilon) - \lim_{\epsilon \downarrow 0} F(a + \epsilon)$$

**pourvu** que les deux limites finies existent (ce qui peut faire défaut).

Dans ce cas on dit que l'intégrale **converge**. Autrement, elle **diverge**.

37

**Proposition.** Soient  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions continues telles que  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in ]a, b[$ . Alors :

- (a) Si  $\int_a^b g(t) dt$  converge, il en est de même pour  $\int_a^b f(t) dt$   
 (b) Si  $\int_a^b f(t) dt$  diverge, il en est de même pour  $\int_a^b g(t) dt$

Pour traiter les intégrales impropres quand la fonction intégrée est à signe variable, on dispose de deux méthodes :

1. Analyser la primitive si possible ;
2. Appliquer le critère suivant :

**Proposition.** Si  $\int_a^b |f(t)| dt$  converge, alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge.

39

**Terminologie :** Dans le cadre de la proposition, on dit que

$\int_a^b f(t) dt$  **converge absolument**.

Ce critère pour la convergence de  $\int_a^b f(t) dt$  est suffisant

mais pas nécessaire : il existe des cas où  $\int_a^b f(t) dt$  converge, mais pas absolument ; c-à-d,  $\int_a^b |f(t)| dt$  diverge.

Dans cette situation, il est dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  converge **conditionnellement**, ou encore est **semi-convergente**.

38

40

### Terminologie :

Quand  $\int_a^b |f(t)| dt$  converge, on dit que  $f$  est *intégrable* sur  $[a, b]$ .

Donc, pour une fonction positive, “intégrable” et “intégrale convergente” sont synonymes. Tandis qu’une fonction générale peut être soit intégrable, soit engendrer une intégrale qui n’est que semi-convergente, soit rien du tout (l’intégrale diverge).

### Exemple :

L’intégrale de Fresnel  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  est semi-convergente.

41

Avec  $f$  et  $g$  *intégrables*, on retrouve les propriétés familières :

#### 1. (linéarité)

$$\int_a^b (cf(x) + kg(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx + k \int_a^b g(x) dx.$$

#### 2. (préservation d’inégalités)

$$f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

#### 3. (valeur absolu)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

#### 4. (relation de Chasles) Pour tout $c \in [a, b]$ on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

42