Université Claude Bernard Lyon 1
Math L2 « Fonctions de plusieurs variables »
Examen : mercredi 11 janvier 2017 : durée 2h00

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considérée comme une tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur une feuille imprimée recto-verso.

Ainsi que votre nom et votre numéro d'étudiant, identifier sur votre copie (en haut, très lisible) votre Parcours (c'est soit Math-Info, soit Cursus Préparatoire).

Attention : Il s'agit de traiter les exercices 1, 2, 3, 4 et un seul (au choix) des exercices 5 ou 6.

1. (6 points)

(a) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}\, 5^n}$ converge-t-elle ?

(b) Pour quelles valeurs de $x \in]1,+\infty[$ la série $\sum (x-1)^{n \ln n}$ converge-t-elle ?

(c) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x - \sqrt{1+x^2}\right) \mathrm{d}x$.

2. (3 points) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.

(b) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

(c) Pour quelles valeurs de $a > 0$ la convergence est-elle uniforme sur $[-a,a]$?

3. (3 points)

Soit D le domaine de $(\mathbb{R}_+)^2$ limité par les courbes $xy = 1$ et $2x + y = 3$; c-à-d,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, xy \geqslant 1, 2x+y \leqslant 3\}.$$

(a) Représenter graphiquement l'allure du domaine D.

(b) Calculer $\displaystyle\iint_D x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. (3 points) Soit Ω le domaine dans $\mathbb{R}^3_+$ $\left(\text{noté aussi } (\mathbb{R}_+)^3\right)$ qui est compris dans l'intérieur du cylindre défini par $x^2 + y^2 = 25$, qui est limité en dessous par le plan $z = 0$, et au dessus par le plan $x + y + z = 10$.

(a) Représenter graphiquement l'allure du domaine Ω.

(b) Calculer le volume de Ω en utilisant les coordonnées cylindriques.

SOIT

5. (5 points)

(a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Définir ce que veut dire la phrase *f est convexe*.

(b) On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) := x^2 + x(c-3y) + 3y^2 + e^{ky+m}$, où $c, k,$ et m sont des paramètres réels fixés. Prouver que f est convexe.

(c) Prouver que la fonction $g(x,y) := x^2 + x(4-3y) + 3y^2 + e^{-9y+18}$ atteint un minimum global au point $(1,2)$.

On considère maintenant le problème (P) suivant en calcul des variations :

$$\min \int_0^1 \left\{ 3x'^2 + x^2 + x(2t-1-3x') + e^{t(x'+1)} \right\} dt \ : \ x \in C^2, x(0) = 1, x(1) = 0.$$

(d) Expliciter le lagrangien $L(t,x,v)$ du problème, et écrire l'équation d'Euler (la forme initiale suffira).

(e) Prouver que la fonction $x_*(t) := 1-t$ est solution globale du problème (P).

OU

6. (5 points) On définit la fonction Γ d'Euler $\Gamma :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } x > 0$$

(on ne demande pas de vérifier la convergence de l'intégrale ci-dessus).

(a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b1) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On considère deux fonctions φ et ψ définies sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \varphi(t) = \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right) e^{-t} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \varphi(t)\ln(t).$$

Montrer que φ et ψ sont intégrables sur $]0,+\infty[$. On admet que la fonction $t \longmapsto \varphi(t)(\ln t)^2$ est aussi intégrable sur $]0,+\infty[$.

(b2) Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$ à l'aide d'intégrales pour $x > 0$.

(c) En déduire les variations de Γ'.

(d) Calculer $\Gamma(1)$ puis $\Gamma(2)$. En déduire l'existence d'un unique réel $\alpha > 0$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$ (on pourra aussi utiliser la question précédente).

(e) En déduire le signe de $\Gamma'(x)$ en fonction de x puis le tableau de variations de la fonction Γ.

Quelques éléments de réponse :

1. (a) Pour $|x| < 5$ (critère de d'Alembert) ainsi que $x = -5$ (série alternée convergente) ; pour $x = 5$, on obtient une série de Riemann divergente.

(b) $1 < x < 2$ (critère de Cauchy, ou comparaison avec une série géométrique) ; divergence pour $x = 2$ puisque u_n ne tend pas vers 0.

(c) Diverge vers $-\infty$ parce que

$$f(x) = \left(x - \sqrt{1+x^2}\right) \times \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{-1}{\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)} \sim \frac{-1}{2x}.$$

2. (a) $f(x) = \begin{cases} +1 & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ -1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ +1 & x > 1 \end{cases}$

(b) Non : si la convergence était uniforme, la limite f serait continue.

(c) Par le raisonnement de (b), il faut certainement $a < 1$. Et dans ce cas on a bien convergence uniforme pour x dans l'intervalle $[-a, a]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} + 1\right| = \left|\frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1}\right| \leqslant 2a^{2n} \to 0$$

3.

$$\begin{aligned} \iint_D x\,dA &= \int_{1/2}^{1} \int_{1/x}^{3-2x} x\,dy\,dx \\ &= \int_{1/2}^{1} x\left(3 - 2x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(3x - 2x^2 - 1\right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^5 \int_0^{10 - r\cos\theta - r\sin\theta} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^5 r(10 - r\cos\theta - r\sin\theta)\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[5r^2 - \frac{r^3}{3}(\sin\theta + \cos\theta)\right]_0^5 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(125 - \frac{125}{3}(\sin\theta + \cos\theta)\right) d\theta \\ &= 125\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{125}{6}(3\pi - 4). \end{aligned}$$

5. (b) La fonction $(x,y) \mapsto x^2 + x(c-3y) + 3y^2$ est convexe (hessienne sdp), et $y \mapsto e^{ky+m}$ est convexe, donc la somme f est convexe.

(c) g est convexe par (b), et son gradient s'annule en $(1,2)$, d'où la conclusion par un résultat du cours.

(d) $L(t,x,v) = 3v^2 + x^2 + 2tx - x - 3xv + e^{t(v+1)}$

$\frac{d}{dt}\left\{6x' - 3x + te^{t(x'+1)}\right\} = 2x + 2t - 1 - 3x'$

(e) x_* satisfait l'équation d'Euler ci-dessus, et L est convexe en (x,v) (par la partie (b)), d'où la conclusion par un résultat du cours.