Math L2 / Unité d'enseignement « Fonctions de plusieurs variables »

Examen partiel CC1 / mercredi 2 novembre 2016 / Durée 1h30

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature, de calculettes, et de téléphones n'est pas autorisée.

1. (4 points)

(a) Soit U une partie dans $\mathbb{R}^n$. Définir ce que veut dire la phrase « l'ensemble U est convexe ».

(b) Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$. Définir ce que veut dire la phrase « l'ensemble A est ouvert ».

(c) Soit E une partie dans $\mathbb{R}^n$. Énoncer le critère *séquentiel* qui équivaut à la phrase « l'ensemble E est fermé ».

(d) Énoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2. (6 points) Étudier (aussi complètement que possible) la nature des séries suivantes :

$$(a) \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{2^n+n} \qquad (b) \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n}+2)} \qquad (c) \quad \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{1+\sin^2\frac{1}{n}}{1-\sin^2\frac{1}{n}}\right)$$

3. (4 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la règle $f(x,y) = x^3y^4(x+y-1)$. On cherche à minimiser f sur le pavé

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(a) Prouver que ce problème de minimisation admet une solution.

(b) Le résoudre (expliquer la logique de votre démarche).

4. (6 points) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = e^x(y-1)^2 + x^3 - 2x + xy^2 - 2xy$.

(a) Calculer la différentielle de g en $(5,4)$ (autrement dit, expliciter la fonction $(h,k) \mapsto dg(5,4)(h,k)$).

(b) Trouver le seul point critique de g dans $\mathbb{R}^2_+$.

(c) À partir du point $(2,1)$, quelle direction de déplacement augmente la valeur de g le plus rapidement ?

(d) On suppose que la relation $g(x,y) = 1$ détermine implicitement y en fonction dérivable de x autour du point $(0,2)$. Calculer alors $y'(0)$.

(e) Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$u(0) = 0,\ u'(0) = 3,\ v(0) = 2,\ v'(0) = 4,$$

et soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $\theta(t) := g(u(t), v(t))$. Calculer $\theta'(0)$.

(f) Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe de niveau $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$ au point $(0,2)$.