Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

# FICHE 4 : Matrices

**Exercice 1.** Soient $S, T$ deux matrices définies par

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $S^2, T^2, ST, TS, STS$ et $TST$. Calculer le rang de ces matrices.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$A \mapsto A +^t A.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**Exercice 3.** Pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit la trace de $A$ par :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

a) Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, et que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si $A$ et $B$ sont deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$

c) Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.

d) Montrer qu'on ne peut pas trouver $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

**Exercice 4.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, soit $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$ et soit $f$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ définie par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) &= 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) &= 6e_1 + 6e_2 - e_3. \end{aligned}$$

a) Décrire l'application linéaire $f \circ f$.

b) Montrer que $f$ est bijective et décrire l'application linéaire $f^{-1}$.

**Exercice 5.** Soit $E$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, stable pour la multiplication des matrices. Quelle est sa dimension ?

b) Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}$ vers $E$ définie pour tout $z$ complexe par $\varphi(z) = M_{\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)}$. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et qu'en outre pour tous $z$, $z'$ complexes, $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$. En déduire que $E$ est un corps commutatif.

**Exercice 6.** Soient $A$ et $B$ deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $AB = BA$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$$

2. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A$ est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7.** Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Écrire $A = B + I_3$, calculer $B^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et en déduire $A^n$. Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$. En déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.

**Exercice 8.** On dit qu'une matrice carrée $M$ est nilpotente lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ et qu'elle est unipotente lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = I$. Soit $n \geq 1$ un entier et $A$ et $B$ deux matrices carrées $(n, n)$.

a) Montrer que si $AB$ est nilpotente, $BA$ l'est aussi.

b) Montrer que si $AB$ est unipotente, $BA$ l'est aussi.

**Exercice 9.** Montrer que la matrice carrée $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible en calculant explicitement son inverse.

**Exercice 10.** Soit $A$ la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A$ est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 11.** A tout nombre réel $t$ on associe la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t \\ \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \end{pmatrix}.$$

a) Soit $t_1$ et $t_2$ deux réels. Calculer le produit matriciel $M(t_1)M(t_2)$.

b) Soit $t$ un réel. Montrer que $M(t)$ est inversible et fournir une expression très simple de $[M(t)]^{-1}$.

**Exercice 12.** Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A$ est inversible en calculant son inverse $A^{-1}$.

b) En déduire la valeur de $A^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

**Exercice 13.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$, puis $A^3$, puis $A^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Calculer l'inverse $B$ de $A$, puis toutes les puissances $B^n$ pour $n \geq 1$.

**Exercice 14.** Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrices à coefficients réels. Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, et soit $(e_1, e_2, e_3)$ et $(e_1', e_2', e_3')$ deux bases de $E$ ; soit $F$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1 et $f_1$ un vecteur non nul de $F$. On suppose que la matrice de passage de $(e_1, e_2, e_3)$ à $(e_1', e_2', e_3')$ est la matrice $P$.

a) Calculer la matrice $P^{-1}$.

b) Soit $u$ l'application linéaire de $E$ vers $F$ dont la matrice est $A$ dans les bases $(e_1, e_2, e_3)$ et $(f_1)$. Déterminer la matrice de $u$ dans les bases $(e_1', e_2', e_3')$ et $(5f_1)$.

**Exercice 15.** Soit $E$ un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. On pose $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3$, $f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3$.

a) Vérifier que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $E$, et écrire la matrice de passage de la base $\underline{e}$ la base $\underline{f}$.

b) Soit $v$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$ ?

c) Soit $v$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$ ?

d) Pour $v$ vecteur de $E$, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{f}$. Exprimer $x'$, $y'$ et $z'$ en fonction de $x$, $y$ et $z$.

**Exercice 16.** Soit $E$ un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. On pose $f_1 = e_1 - e_3$ et $f_2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$. Pour $v$ vecteur de $E$, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$.

a) Est-il possible de trouver un $f_3$ tel que si $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\underline{f}$ est une base de $E$ dans laquelle, pour tout vecteur $v$ de $E$, la troisième coordonnée de $v$ soit $z' = z$ ?

b) Mme question avec $z' = x - y + z$.

c) Quand la réponse est "oui", déterminer tous les $f_3$ qui conviennent.

**Exercice 17.** Soit $E$ un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Soit $u$ l'endomorphisme dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

a) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $E$.

b) Calculer la matrice de $u$ dans $\underline{f}$.

c) Calculer $A^{100}$.

**Exercice 18.** En fournissant une matrice équivalente échelonnée, déterminer le rang de chacune des matrices réelles suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$