Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE 1 : Espaces vectoriels

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit l'addition et la multiplication par un réel de différentes façons. Dire dans chacuns des cas, si ces opérations munissent $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel.

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.
2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ et $\lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.
3. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 y_1)$.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition naturelle:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et de la loi externe

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \qquad (\lambda, (x, y)) \;\mapsto\; \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, 0).$$

A t-on muni ainsi $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni d'opérations naturelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_+^*$. On définit sur E une loi de composition interne, notée $\hat{+}$, par

$$(x, y) \mapsto x \hat{+} y := xy$$

et une loi de composition externe sur $\mathbb{R}$ par

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda * x := x^\lambda.$$

Montrer que $(E, \hat{+}, *)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5. Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E:

1. $E = \mathbb{R}^2, \qquad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^2, \qquad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2, \qquad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3, \qquad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
5. $E = \mathbb{R}^3, \qquad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
6. $E = \mathbb{R}^3, \qquad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = x\}$.

Exercice 6. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cap G$ et $F + G$ sont encore des sous-espaces vectoriels de E.

Exercice 7. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et u_3, et G le sous-espace vectoriel engendré par u_4, où

$$u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (0,1,1,0), u_3 = (0,0,0,1), u_4 = (0,1,1,1).$$

Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E peut ne pas être un sous-espace vectoriel de E.
2. Si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E, montrer en fait que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 9. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E tel que $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$. Notons $G := C_E F = E \setminus F$.

1. Montrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2. L'ensemble $H := G \cup \{0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que la somme $F + G$ est en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les ensembles

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\} \qquad \text{et} \qquad F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}.$$

Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et que $E \oplus F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Soient E, F les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}.$$

1. Vérifier que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni d'opérations naturelles.

1. Montrer que les deux parties suivantes sont sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{F} \mid f(-x) = f(x)\ x \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{I} := \{f \in \mathcal{F} \mid f(-x) = -f(x)\ x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.