Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE 0 : Groupes et Corps

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des groupes pour $+$.
2. Montrer que $(Q \setminus \{0\}; \times)$ est un groupe.
3. $(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$ et $(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
4. $\mathbb{Q}_{>0}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \times)$?

Exercice 2. Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble des bijections de E, noté $S(E)$ forme un groupe pour la composition $\circ$.

Exercice 3. Soit $E = \{1, \ldots, n\}$ et S_n l'ensemble des bijections de E dans E.

1. Si on note "$\circ$" l'opération de composition, vérifier que $(S_n, \circ)$ est un groupe. Quel est l'ordre de S_n ? Les éléments de S_n sont appelés des permutations. On note

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la permutation de S_3 qui envoie 1 sur 2, 2 sur 1, et 3 sur 3, et de façon générale

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

2. Soient p et p' les deux permutations de S_5 définies par :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } p' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $p \circ p'$, $p' \circ p$, et l'inverse de p.

3. On considère les trois permutations de S_4 suivantes :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \tau'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\pi = \tau \circ \tau' \circ \tau''$.

4. Calculer π^4. En déduire que $\pi^{-1} = \pi^3$.
5. La partie $\{id, \pi, \pi^2, \pi^3\}$ est-elle un sous-groupe de S_4 ?

Exercice 4. (Signature d'une permutation) Soit ε l'application de S_n dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

1. Déterminer l'image de ε (on pourra montrer que $(\varepsilon(\sigma))^2 = 1$).
2. Montrer que ε est un morphisme de S_n vers un groupe que l'on précisera.

Exercice 5.

1. Déterminer par leur table tous les groupes à 2, 3 et à 4 éléments.
2. Ecrire la table d'addition des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 2, 3, 4$ et la table d'addition du groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Que peut-on en conclure ?
3. Ecrire la table de la loi $\circ$ des isométries d'un triangle équilateral.
4. Ecrire la table de composition $\circ$ du groupe des permutations S_3.
5. Soit
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
L'application $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_3$ définie par
$$f(\bar{0}) = id, \quad f(\bar{1}) = \pi, \quad f(\bar{2}) = \pi 2$$
est-elle un morphisme de groupes ?

Exercice 6. Soient $(G, \star)$ et $(G', \star')$ deux groupes et soit f un morphisme de groupes de $(G, \star)$ dans $(G', \star')$.

1. Si e est l'élément neutre de G et e' est l'élément neutre de G', montrer que $f(e) = e'$.
2. Montrer que pour tout $x \in G$, $f(x)^{-1} = f(x)^{-1}$.
3. Montrer que l'image $f(K)$ de tout sous-groupe $K < G$ est un sous-groupe de G'. Que peut-on dire de l'image réciproque$f^{-1}(K') \subseteq G$ d'un sous-groupe $K' < G'$?
4. On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ l'ensemble $\{g \in G \mid f(g) = e'\}$. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$.
5. Déterminer le noyau du morphisme
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad : l \mapsto \bar{l}.$$
6. Déterminer le noyau du morphisme de signature (de l'exercice 4)
$$\varepsilon : S_3 \to \mathbb{R} \quad : \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma).$$

Exercice 7. Soit $(G, \star)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que la restriction à H de l'opération $\star$ (défiie sur G) fait de H un groupe.

Exercice 8. Si H et K sont deux sous-groupes d'un même groupe G, montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Exercice 9. On note U_n le sous-ensemble de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont les éléments sont les racines n-ièmes de l'unité :

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}.$$

1. Montrer que U_n est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont de la forme précédente (On pourra montrer qu'un sous-groupe de cardinal n est contenu dans U_n, puis conclure par cardinalité).
3. Montrer que $U_d \subseteq U_n$ si et seulement si d divise n.
4. Déduire des deux questions précédentes que le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par $\exp(2\pi i/n)$ et $\exp(2\pi i/m)$ est U_d, où d est le ppcm de m et de n.

Exercice 10.

1. Montrer que l'ensemble des éléments de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ qui sont inversibles (pour $\times$) est un groupe multiplicatif.
2. Faire la liste de ces éléments inversibles lorsque $n = 5$ et $n = 6$.
3. Trouver l'inverse multiplicatif de 6 dans l'anneau $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Montrer que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)$.

Exercice 12. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Exercice 13. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles est un corps.

Exercice 14.

1. Montrer que $\mathcal{A} = (\{a + ib\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
2. Montrer qu'un élément z de $\mathcal{A}$ est inversible pour l'opération $\times$ ssi $|z| = 1$. En déduire la liste des éléments inversibles de $\mathcal{A}$.
3. L'anneau $\mathcal{A}$ est-il un corps?

Exercice 15.

1. Montrer que $B = (\mathbb{C}^2, +, \star)$ est un anneau, où
$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad et \quad (a, b) \star (a', b') = (aa' - \bar{b}b', ba' + \bar{a}b').$$
2. Montrer que tout élément non nul de B est inversible (pour $\star$).
3. B est-il un corps ?