Université Claude Bernard
Math II-Algèbre - MAT1004L - séquence 4

CC1 - Groupes et espaces vectoriels

- Lundi 4 avril 2011 : durée 1 heure -

Exercice 1. On considère le groupe symétrique S_4, et le sous-ensemble $P = \{id, \alpha, \beta, \gamma\}$, formé par les quatre éléments suivants :

$$id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la table de la composition $\circ$, pour l'ensemble P.
2. Calculer les inverses de id, α, β et γ.
3. En déduire que $(P, \circ)$ est un sous-groupe de S_4. Justifier votre réponse.
4. $(P, \circ)$, est-il un groupe commutatif ?
5. Calculer $\varepsilon(\alpha)$, la signature de α.
6. Existe-t-il un sous-groupe de $(P, \circ)$ différent de $\{id\}$ et P ?

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les sous-ensembles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions monotones croissantes.
2. L'ensemble des fonctions prenant la valeur -1 en 0.

Exercice 3. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y = 0\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + 2\}$;
4. Définir la somme $F + G$ et l'intersection de $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
5. On considère le sous-espace vectoriel $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$.
   Calculer $E_1 + E_4$ et $E_1 \cap E_4$.
6. A-t-on $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_4$? Justifier votre réponse.

Exercice 4. Dire si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. $((2, 4), (6, 12))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((2, 4), (6, 13))$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. $((2, 4, 6), (6, 13, 18), (0, 1, 0))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.