Introduction aux équations différentielles. Corrigé de l'exercice 3

Exo 3 . (Application de la transformée de Laplace à l'élasticité.)
On désigne par $\eta(x)$ l'échelon de Heaviside i.e. $\eta(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\eta(x) = 0$ si $x < 0$.
On considère une poutre de longueur $l > 0$ soumise à la contrainte

$$w(x) = w_0(\eta(x) - \eta(x - \frac{l}{2}))$$

avec $w_0 \in \mathbf{R}$.
Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la solution $u(x)$ de l'équation d'élasto-statique

$$\frac{d^4u}{dx^4} = w(x), \quad x \geq 0$$

vérifiant les conditions aux bords

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2}(l) = 0, \quad \frac{d^3u}{dx^3}(l) = 0.$$

Solution: En prenant la transformée de Laplace de l'équation on obtient:

$$p^4L(u)(p) - p^3u(0) - p^2u'(0) - pu''(0) - u'''(0) = \frac{w_0}{p}(1 - e^{-\frac{pl}{2}}).$$

En utilisant les deux premières conditions au bord ($x = 0$) et en posant $a = u''(0), b = u'''(0)$ on a donc

$$L(u)(p) = \frac{w_0}{p^5}(1 - e^{-\frac{pl}{2}}) + \frac{a}{p^3} + \frac{b}{p^4}.$$

Pour retrouver $u(x), x \geq 0$ on utilise: $L(\frac{x^m}{m!})(p) = \frac{1}{p^{m+1}}$ et le fait que si $L(g)(p) = G(p)$ alors $\eta(t - c)g(t - c)$ admet la transformée de Laplace $e^{-cp}G(p)$.

On obtient pour $x \geq 0$:

$$u(x) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{x^3}{3!} + w_0\frac{x^4}{4!} - w_0\,\eta(x - \frac{l}{2})\,\frac{(x - \frac{l}{2})^4}{4!}.$$

Il reste à déterminer les constantes a et b pour satisfaire les conditions au bord $x = l$.
Pour cela, on observe que pour $x > \frac{l}{2}$, $\eta(x - \frac{l}{2}) = 1$ et le calcul des dérivées $u''(x), u'''(x)$ est élémentaire. Je trouve que les conditions au bord $u''(l) = 0 = u'''(l)$ sont équivalentes à $a = w_0\frac{l^2}{8}$ et $b = -w_0\frac{l}{2}$.

Remarque: il est instructif d'étudier la continuité de la solution u et de sa dérivée u' au point $x = \frac{l}{2}$.