Université Lyon 1
L2 Mathématiques
Année 2009-2010

Equations différentielles. Transformées de Laplace (suite).

Exercice 1. (Extrait du partiel d'avril 2006)
En utilisant la méthode de la transformée de Laplace, discuter, en fonction des paramètres réels strictement positifs α, β, γ, la solution du système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} &\alpha I_1'(t) + \beta I_1(t) + \gamma I_2'(t) = E(t) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \geq 0 \\ &\alpha I_2'(t) + \beta I_2(t) + \gamma I_1'(t) = 0 \end{aligned}$$

pour les conditions initiales

$$I_1(0) = I = I_2(0),$$

où $E : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ admet une transformée de Laplace.
[Il est plus simple de commencer par déterminer $L(I_1)(p) \pm L(I_2)(p)$.]

Exo 2.
Résoudre, au moyen de la transformée de Laplace, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) = f(t), \quad t \geq 0,\, x \geq 0,$$

sous les conditions $u(x, 0) = (1 - e^{-x})$, $x \geq 0$ et $u(0, t) = 0$, $t \geq 0$. Ici on suppose que f admet une transformée de Laplace.

Exo 3 . (Application de la transformée de Laplace à l'élasticité.)
On désigne par $\eta(x)$ l'échelon de Heaviside i.e. $\eta(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\eta(x) = 0$ si $x < 0$.
On considère une poutre de longueur $l > 0$ soumise à la contrainte

$$w(x) = w_0(\eta(x) - \eta(x - \frac{l}{2}))$$

avec $w_0 \in \mathbf{R}$.
Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la solution $u(x)$ de l'équation d'élasto-statique

$$\frac{d^4u}{dx^4} = w(x), \quad x \geq 0$$

vérifiant les conditions aux bords

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2}(l) = 0, \quad \frac{d^3u}{dx^3}(l) = 0.$$