Université Lyon 1
Année 2009/2010

Equations différentielles. Transformée de Laplace.

La transformée de Laplace $L(f)$ de l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, au point $p \in \mathbf{C}$, est définie (si elle existe) comme suit:

$$L(f)(p) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s f(t)e^{-pt}dt$$

Exo 1
En guise de mise en train, calculer
- $L(cos\, mt\, cosnt)$, $m, n \in \mathbf{N}$
- $L(sin(t+\tau))$, $L(cos(t+\tau))$

Exo 2 (*Transformée de Laplace d'une fonction périodique*)
- Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de période T, i.e.

$$f(t+T) = f(t), \forall t \in \mathbf{R}.$$

Exprimer la transformée de Laplace $L(f)(p)$ en fonction de l'intégrale sur une période

$$\int_0^T f(t)e^{-pt}dt.$$

[On pourra observer $\int_0^\infty = \lim_{n\to\infty} \int_0^{nT}$*]*
- Soit $a \in \mathbf{R}^\star$.Calculer la transformée de Laplace de l'application périodique de période T définie par

$$\begin{aligned} f(t) &= a \quad \text{pour } 0 < t \leq T/2 \\ f(t) &= -a \text{ pour } T/2 < t \leq T \end{aligned}$$

Rappel:
(1) la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^k$ où $k \in \mathbf{N}$ s'obtient par récurrence en observant que

$$L(t^k)(p) = \frac{k}{p} L(t^{k-1})(p).$$

(2) si $h(t) = g(t)\, exp(\lambda t)$ on a la formule de translation

$$L(h)(p) = L(g)(p - \lambda).$$

En combinant (1) et (2) on obtient

$$L(\frac{t^{m-1}exp(\lambda t)}{(m-1)!})(p) = \frac{1}{(p-\lambda)^m}.$$

Exo 3 (*Transformée de Laplace inverse*)

Le but de cet exercice est de retrouver la fonction $f(t)$ à partir de sa transformée de Laplace $L(f)(p)$ lorsque $L(f)(p)$ est un quotient de polynômes $\frac{P(p)}{Q(p)}$ sans racines communes avec $deg\,(P) < deg\,(Q)$.

Il y a essentiellement une méthode. Elle consiste à faire un développement en éléments simples sur $\mathbf{C}$ de la fonction rationnelle $\frac{P(p)}{Q(p)}$ et ensuite à utiliser le rappel pour chaque élément simple. On va établir une formule qui donne directement $f(t)$ à partir de $\frac{P(p)}{Q(p)}$.

1) Pour $\lambda \in \mathbf{C}$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbf{C}$, déterminer le terme de degré $n-1$ en $(p-\lambda)$ de la fonction

$$A(p,t) = \Big(\frac{A_n}{(p-\lambda)^n} + \frac{A_{n-1}}{(p-\lambda)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(p-\lambda)}\Big)(p-\lambda)^n exp\big((p-\lambda)t\big)$$

2) En déduire

$$\frac{1}{(n-1)!}\lim_{p\to\lambda}\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\,A(p,t)$$

Remarque: Dans cette expression t est considéré comme paramètre.

3) Montrer que la fonction $f(t)$ telle que $L(f)(p) = \frac{P(p)}{Q(q)}$ (où P et Q sont sans racines communes) est donnée par

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(n_i-1)!}\lim_{p\to\lambda_i}\frac{d^{n_i-1}}{dp^{n_i-1}}\Big(\frac{P(p)}{Q(p)}exp(pt)(p-\lambda_i)^{n_i}\Big)$$

où les complexes $\lambda_i, 1 \le i \le r$ sont les racines de Q chacune étant de multiplicité n_i.

4) En déduire que si les racines de Q sont simples on a

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r}\frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)}exp(\lambda_i t).$$

Rappel: (*Résolution d'équations différentielles par transformée de Laplace*)

Voici l'idée de la méthode: On veut trouver la solution $x(t)$ de l' équation différentielle

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t)$$

pour les conditions initiales spécifiant la valeur de $x(0), x'(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)$. Pour ce faire on procède comme suit

(1) Prendre la transformée de Laplace de l'équation.

(2) Résoudre celle-ci pour $L(x)(p)$

(3) Prendre la transformée de Laplace inverse pour obtenir $x(t)$.

Pour calculer la transformée de Laplace inverse on utilise très souvent la convolution des applications: si $f, g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ on appelle produit de convolution de f et g l'expression

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

La propriété essentielle de la convolution est la suivante (cf cours): La transformée de Laplace transforme le produit de convolution en produit usuel des transformées de Laplace:

$$L(f \star g)(p) = L(f)(p) \cdot L(g)(p)$$

Exo 4
Trouver $x(t)$ telle que

$$x^{(2)}(t) + x(t) = 2\,cos(t), \quad x(0) = 0,\, x'(0) = 1$$

par transformée de Laplace.
Idem pour l'équation

$$x^{(3)}(t) + x'(t) = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Idem pour le système d'équations

$$\begin{aligned} x'(t) + y(t) &= 0 \\ x(t) + 2y(t) - y'(t) &= 0 \\ x(0) = 1, \quad y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Exo 5

Exercice 2 du partiel d'avril 2006.

Exo 6
Soit $a, b \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. Utiliser la transformée de Laplace et le produit de convolution pour retrouver la solution générale de l'équation

$$ay'(t) + by(t) = f(t), \quad 0 \leq t$$

Exo 7
Utiliser la transformée de Laplace et la convolution pour obtenir la solution générale de l'équation

$$x^{(2)}(t) - 3x'(t) + 2x(t) = cos(\omega t)$$

où $\omega \in \mathbf{R}$.