Université LYON 1
L2 Mathématiques
Année 2009/2010
Groupe de S. Parmentier

Equations différentielles: résumé de travaux dirigés III

Méthode de séparation des variables.

I. Orthogonalité et développements en série.

Soit un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ et $s : [a, b] \to \mathbf{R}$ une application continue strictement positive i.e. $s(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
Pour deux applications $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ continues on pose

$$\langle f, g \rangle_s = \int_a^b f(x)g(x)\, s(x)dx.$$

Observer que pour tout $r \in \mathbf{R}$ et toutes applications continues f, g, h, $\langle\, , \rangle_s$ vérifie
- $\langle rf + g, h \rangle_s = r\langle f, h \rangle_s + \langle g, h \rangle_s$
- $\langle f, g \rangle_s = \langle g, f \rangle_s$,
- $\langle f, f \rangle_s \geq 0$ et $f \neq 0 \Rightarrow \langle f, f \rangle_s \neq 0$.

Notons $C(I, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle I à valeurs réelles. Les propriétés qui précèdent nous disent que l'application

$$\begin{gathered}\langle\, , \rangle_s : C(I, \mathbf{R}) \times C(I, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_s\end{gathered}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive i.e. un produit scalaire.

Orthogonalité

Deux applications $f, g \in C(I, \mathbf{R})$ sont dites orthogonales si

$$\langle f, g \rangle_s = 0.$$

Plus généralement, une famille d'applications

$$f_n : I \to \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},$$

est dite orthogonale si quels que soient $n \neq m$ on a

$$\langle f_n, f_m \rangle_s = \int_a^b f_n(x)f_m(x)\, s(x)dx = 0.$$

La racine carrée du réel positif

$$\langle f_n, f_n \rangle_s = \int_a^b (f_n(x))^2\, s(x)dx\ \geq 0$$

est appelée norme de f_n.

exemple: soit $l > 0$. Les applications

$$f_n : [0, l] \to \mathbf{R} : x \mapsto f_n(x) = sin\,(\frac{n\pi x}{l}),\; n \in \mathbf{N}$$

sont orthogonales pour la fonction (triviale) $s : [0, l] \to \mathbf{R} : x \mapsto s(x) = x$.
En effet, l'identité $2sin\,A\,sinB = cos(A - B) - cos(A + B)$ donne

$$\int_0^l sin\,(\frac{n\pi x}{l})\,sin\,(\frac{m\pi x}{l})\,dx = \frac{l}{2}\delta_{n,m}$$

où le symbole $\delta_{n,m}$ de Kronecker vaut 0 si $n \neq m$ et 1 si $n = m$.

Développement en série d'applications

On considère une famille d'applications $f_n : I \to \mathbf{R}$. On dit que l'application $f : I \to \mathbf{R}$ admet un développement en séries des f_n, $n \in \mathbf{N}$, si la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\,f_n(x)$ converge, par exemple simplement, vers $f(x)$ pour tout $x \in I$. On écrira alors tout simplement

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\,f_n(x), \quad x \in I.$$

Remarque: il y a divers types de convergence d'une série vers une application. J'ai choisi ici, pour faire simple et en guise d'illustration, la convergence simple.

Dans cette option on considère le développement de f en série des f_n formellement (i.e. sans se soucier des questions de convergence) et on s'autorise pour les calculs à faire comme si les sommes étaient finies.

Lorsque la famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale on a dès lors

$$\langle f, f_m\rangle_s = \langle\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\,f_n,\; f_m\rangle_s = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\langle f_n, f_m\rangle_s = a_m\,\langle f_m, f_m\rangle_s$$

i.e.

$$a_m = \frac{\langle f,\; f_m\rangle_s}{\langle f_m,\; f_m\rangle_s}.$$

exemple (séries de Fourier): pour la série

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n\,sin\,(\frac{n\pi x}{l})$$

on a

$$b_m = \frac{\int_0^l f(x)\,sin\,(\frac{m\pi x}{l})\,dx}{\int_0^l sin\,(\frac{m\pi x}{l})\,sin\,(\frac{m\pi x}{l})\,dx} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,sin\,(\frac{m\pi x}{l})\,dx.$$

II. Séparation des variables sur un exemple

Voici le problème: on se propose de déterminer la solution

$$u : [a, b] \times [t_0, t_1] \to \mathbf{R} : (x, t) \mapsto u(x, t)$$

de l' équation aux dérivées partielles

$$(Lu)(x,t) = 0 \qquad\qquad (E)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 i.e. une expression de la forme

$$\begin{aligned}(Lu)(x,t) = A(x,t)\,u(x,t) + B(x,t)\,u_x(x,t) + C(x,t)\,u_t(x,t)\\ + D(x,t)\,u_{xx}(x,t) + E(x,t)\,u_{xt}(x,t) + F(x,t)\,u_{tt}(x,t)\end{aligned}$$

(ici $A, B, C, D, E, F : [a,b] \times [t_0, t_1] \to \mathbf{R}$ sont des applications),
la solution $u(x,t)$ devant satisfaire des conditions aux frontières (F) portant sur

$$u(a,t),\ u(b,t),\ u_t(a,t),\ u_t(b,t), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

et des conditions initiales (I) portant sur

$$u_x(x,t_0),\ u_t(x,t_0), \quad \forall x \in [a,b].$$

exemple: l'équation des ondes

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \qquad\qquad (E)$$

pour $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty[$ avec les conditions aux frontières

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \qquad\qquad (F)$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad \forall x \in [0,l] \qquad\qquad (I)$$

La résolution se fait en deux étapes:

- recherche des solutions élémentaires de l'équation (E) de la forme $u(x,t) = \phi(x)\tau(t)$ vérifiant les conditions (F).

- détermination de la solution $u(x,t)$ sous la forme d'une série $u(x,t) = \sum_n \phi_n(x)\tau_n(t)$ en solutions élémentaires vérifiant les conditions (I).

exemple de l'équation des ondes:

Etape 1: l'équation (E) équivaut à

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\tau''(t)}{c^2\tau(t)}.$$

Il existe donc un réel λ tel que

$$\phi''(x) = \lambda\,\phi(x) \quad (E_x), \quad \tau''(t) = \lambda c^2\,\tau(t) \quad (E_t).$$

Les conditions (F) sont alors équivalentes à

$$\phi(0) = 0 = \phi(l) \qquad (F)_x.$$

La résolution de $(E)_x$ et $(F)_x$ donne la famille de solutions

$$\phi_n(x) = sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

La résolution de $(E)_t$ pour chaque λ_n donne alors la famille de solutions élémentaires

$$\phi_n(x)\,\tau_n(t) = sin(\frac{n\pi x}{l})\,\big(A_n\,cos(\frac{n\pi}{l}ct) + B_n sin(\frac{n\pi}{l}ct)\big), \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$$

où A_n et B_n sont des constantes réelles arbitraires.

Etape 2: poser

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}} sin(\frac{n\pi x}{l})\,\big(A_n\,cos(\frac{n\pi}{l}ct) + B_n sin(\frac{n\pi}{l}ct)\big)$$

Les conditions (I) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} f(x) = u(x,0) &= \sum_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}} A_n\,sin\frac{n\pi x}{l} \\ g(x) = u_t(x,0) &= \sum_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}} \frac{n\pi c}{l}\,B_n\,sin\frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Le problème admet dès lors une solution en variables séparées si et seulement si les fonctions f et g admettent un développement en série de Fourier en sinus sur l'intervalle $[0,l]$. Si c'est le cas, on a (cf la partie **I** de ce résumé):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,sin(\frac{n\pi}{l}x)\,dx \\ \frac{n\pi c}{l}\,B_n &= \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\,sin(\frac{n\pi}{l}x)\,dx \end{aligned}$$

Remarque: voici un exemple type d'applications pour lequel un tel développement existe: supposons que l'application $f : [0,l] \to \mathbf{R}$ soit continue sur $[0,l]$ et dérivable sur $[0,l]$ (sauf peut-être en un nombre fini de points). Supposons de plus $f(0) = 0 = f(l)$. On peut alors définir une application périodique impaire $\overline{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en posant

$$\overline{f}(x) = f(x), \, x \in [0,l], \quad \overline{f}(x) = -f(-x), \, x \in [-l,0], \quad \overline{f}(x+2l) = \overline{f}(x), \, x \in \mathbf{R}.$$

Cette application périodique $\overline{f}$ admet un développement de Fourier convergent en sinus (donc f aussi) dont les coefficients sont donnés par la formule plus haut.