Université LYON 1
L2 Mathématiques
Année 2009/2010
S.P.

Introduction aux Equations Différentielles.

Résumé de Travaux Dirigés I

I.

Le cas le plus simple: on se donne un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, deux applications continues $a, b : I \to \mathbf{R}$ et il s'agit de résoudre l'équation

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \qquad (E)$$

d'inconnue $x : I \mapsto \mathbf{R}$.

Solution: poser

$$A(t) = \int_\tau^t a(u)du$$

($A(t)$ est la primitive de $a(t)$ sur I vérifiant $A(\tau) = 0$, $\tau \in I$) et faire le changement d'inconnue

$$x(t) = Z(t)\, expA(t)$$

L'équation (E) est alors équivalente à

$$Z'(t) = b(t)exp(-A(t))$$

dont la solution est immédiate

$$Z(t) = \int_\tau^t b(u)\, exp(-A(u))du + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

En conclusion:

$$x(t) = (\int_\tau^t b(u)exp(-A(u))du)\, exp(A(t)) + C\, exp(A(t)), \quad C \subset \mathbf{R}$$

est la solution générale de (E).
Remarques: $i)$ $x(\tau) = C\, exp(A(\tau))$ i.e. la constante C est déterminée par la valeur de x en un point $\tau \in I$.
$ii)$ La solution $x(t)$ est la somme de la solution générale de l'équation homogène

$$x'(t) = a(t)x(t) \qquad (H)$$

et d'une solution particulière de l'équation complète (E).

II. Systèmes matriciels

On désigne par $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \in \mathbf{N}$ à coefficients réels.

On se donne un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et deux applications

$$A : I \to M_n\mathbf{R} : t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$$
$$B : I \to \mathbf{R}^n : t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

continues (i.e. les composantes $a_{ij} : I \to \mathbf{R}$ et $b_j : I \to \mathbf{R}$ sont des applications continues) et il s'agit de résoudre le système d'équations différentielles linéaires

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \qquad (E)$$

d'inconnue vectorielle

$$X : I \to \mathbf{R}^n : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Le cas homogène: lorsque $B(t) = 0$, $\forall t \in I$, l'équation s'écrit

$$X'(t) = A(t)X(t) \qquad (H).$$

Pour déterminer les solutions de (H) on utilise le 'principe de superposition' suivant: si

$$\phi_i : I \to \mathbf{R}^n, \quad 1 \leq i \leq k,$$

sont solutions de (H) alors pour tous réels $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{R}$,

$$r_1\phi_1 + \cdots + r_k\phi_k$$

est aussi solution de (H). En d'autres termes, l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications $f : I \to \mathbf{R}^n$.
On utilise alors des propriétés matricielles pour expliciter une base de l'espace des solutions i.e. pour trouver n solutions linéairement indépendantes $\phi_1, \dots, \phi_n$ de (H) telles que toute solution ϕ de (H) s'écrive

$$\phi = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n,$$

pour d'uniques constantes $c_1, \dots c_n \in \mathbf{R}$.

On a principalement considéré le cas où A est constante:

Supposons A constante et diagonalisable sur $\mathbf{R}$: soit alors ρ_i, $1 \leq i \leq n$ le spectre de A (certaines valeurs propres pouvant être égale) et P la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs propres de A dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. En posant

$$X(t) = PY(t)$$

l'équation (H) est équivalente à

$$Y'(t) = P^{-1}\,A\,P\,Y(t) = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_n \end{pmatrix} Y(t).$$

C'est un système de n équations indépendantes

$$y_i'(t) = \rho_i\, y_i(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

dont la solution est

$$y_i(t) = c_i\, exp(\rho_i t), \quad c_i \in \mathbf{R}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

La solution générale de l'équation (H) est

$$X(t) = P \begin{pmatrix} c_1\, exp(\rho_1 t) \\ \vdots \\ c_n\, exp(\rho_n t) \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit

$$X(t) = c_1\, exp(\rho_1 t)V_1 + \cdots + c_n\, exp(\rho_n t)V_n$$

où V_i est la $i-$ème colonne de P i.e. le $i-$ ème vecteur propre de A.
Les n solutions

$$\phi_i(t) = exp(\rho_i t)\, V_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

constituent une base de l'espace des solutions de (H).

Supposons A constante et diagonalisable sur $\mathbf{C}$: on passe en complexe i.e. on cherche les solutions $Z : I \to \mathbf{C}^n$ de l'équation $Z'(t) = AZ(t)$. Soit $a_j + ib_j$, $1 \leq j \leq n$ le spectre (complexe) de A. La méthode de diagonalisation que l'on vient de décrire conduit à la solution complexe

$$Z(t) = c_1\, exp((a_1 + ib_1)t)\, V_1 + \cdots + c_n\, exp((a_n + ib_n)t)\, V_n$$

où pour $1 \leq j \leq n$, $c_j \in \mathbf{C}$ et $V_j \in \mathbf{C}^n$ désigne le $j-$ème vecteur propre de A.
L'exponentielle complexe étant définie par

$$exp(a + ib) = exp(a)\,(cosb + isinb), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Il suffit enfin de sélectionner parmi ces solutions complexes celles qui sont réelles i.e. telles que $Z(t) = \overline{Z(t)}$, $\forall t \in I$ ce qui fait apparaitre par exemple des solutions réelles de la forme

$$exp(a_j t)\,(cos(b_j t)\,X_j - sin(b_j t)\,Y_j) \text{ où } V_j = X_j + iY_j.$$

Voir tds pour des exemples.

Le cas général pour A constante et non diagonalisable sur $\mathbf{C}$: On passe en complexe et on utilise le thm de forme normale de Jordan: Il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $P^{-1}\,A\,P$ soit bloc diagonale, chaque bloc non diagonal étant de type de Jordan. Le changement d'inconnues $X(t) = PY(t)$ conduit à des équations matricielles de la forme

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z \end{pmatrix} Y(t) \qquad (\star)$$

ce qui fait apparaitre des solutions de base d'un type nouveau dont certains exemples sont traités en tds.

Exponentielle matricielle: bien que peu (ou pas) utilisée en tds, lorsque la matrice A est constante, la solution est donnée par l'exponentielle matricielle:

$$X(t) = exp(At)X(0).$$

Ici pour $M = (m_{ij}) \in M_n\mathbf{C}$ on a posé

$$exp(M) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M^l}{l!}.$$

Pour une matrice M diagonale ($m_{ij} = 0$, $i \neq j$), la matrice $exp(M)$ est aussi diagonale avec pour éléments $exp(m_{jj})$, $1 \leq j \leq n$.

Pour un bloc de Jordan comme dans $(\star)$ plus haut, on écrit $M = zI + J$ où I est la matrice identité et J est la matrice nilpotente dont toutes les composantes sont nulles sauf les 1 au dessus de la diagonale principale. Le fait que ces matrices commutent $(zI)J = J(zI)$ implique

$$exp(zI + J) = exp(zI)exp(J) = exp(z)\,expJ$$

où $expJ$ ne contient qu'un nombre fini de termes (car J est nilpotente).

Pour calculer $exp(M)$ pour M complexe arbitraire on utilise le théorème de Jordan, i.e. on écrit $M = P^{-1}M'P$ où M' est de Jordan par blocs. L'égalité $exp(M) = P^{-1}exp(M')P$ nous permet alors de calculer bloc par bloc.

Matrice fondamentale du système (H):

Supposons que $\phi_j : I \to \mathbf{R}^n : t \mapsto \phi_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, soient une base de solutions de l'équation (H) sur l'intervalle I. La matrice

$$\Phi(t) = \big(\phi_1(t) \cdots \phi_n(t)\big) \in M_n\mathbf{R}$$

(i.e. la $j-$ème colonne de $\Phi(t)$ est constituée des composantes de la $j-$ème solution $\phi_j(t)$) est appelée matrice fondamentale de (H).
La matrice $\Phi(t)$ est inversible pour tout $t \in I$ et on a

$$\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t).$$

Exemples: une matrice fondamentale du système

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} X(t), \quad a, b \in \mathbf{R}$$

est (cf plus haut)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} exp(at) & 0 \\ 0 & exp(bt) \end{pmatrix}.$$

Une matrice fondamentale du système

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} X(t), \quad a \in \mathbf{R}$$

(un bloc de Jordan) est donnée par

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} exp(at) & t\,exp(at) \\ 0 & exp(at) \end{pmatrix}.$$

Résolution du système (E): On adapte ici la méthode (de la variation de la constante) décrite au point **I**.
On pose

$$X(t) = \Phi(t)Y(t).$$

L'équation (E) est alors équivalente à

$$Y'(t) = \Phi(t)^{-1}B(t)$$

dont la solution est

$$Y(t) = \int_\tau^t \Phi(u)^{-1}\,B(u)du + C.$$

Dans cette expression, $\tau \in I$ est fixé (souvent $\tau = 0$) et $C \in \mathbf{R}^n$.
La notation $\int_\tau^t \Phi(u)^{-1}B(u)du$ signifie: prendre la primitive de chaque composante du vecteur $\Phi(u)^{-1}\,B(u)$.

En conclusion, la solution générale de (E) s'écrit

$$X(t) = \Phi(t)\,Y(t) = \Phi(t)\int_\tau^t \Phi(u)^{-1}\,B(u)du + \Phi(t)\,C, \text{ où } C \in \mathbf{R}^n$$

Noter que

$$C = \Phi(\tau)^{-1}\,X(\tau).$$

Dès lors, si l'on se fixe un vecteur $V \in \mathbf{R}^n$, le système (E) admet une unique solution $X(t)$ satisfaisant $X(\tau) = V$.