Exemples de portraits de phase.

1. Système linéaire associé à un bloc de Jordan:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (E)$$

Cette matrice de Jordan n'est pas diagonalisable. Elle a -1 pour unique valeur propre de droite propre $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Les courbes solutions de (E) sont

$$(x(t), y(t)) = ((A + Bt)e^{-t},\ Be^{-t})$$

où $(x(0), y(0)) = (A, B)$ est la condition initiale.

$(0,0)$ est l'unique point stationnaire. Il est attractif car quelquesoit (A, B),

$$lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0),$$

ce qui reflète le fait que -1 est l'unique valeur propre. Lorsque $B = 0$ la trajectoire est $(x(t), y(t)) = (Ae^{-t}, 0)$ i.e. c'est un segment de l'unique droite propre.

L'ordonnée $y(t)$ ne change pas de signe (i.e. les plans supérieur $y > 0$ et inférieur $y < 0$ sont conservés par le flot) et lorsque $B \neq 0$ l'abscisse $x(t)$ change de signe en $t = -\frac{A}{B}$.

Pour tracer les courbes (et les orienter), on utilise le vecteur tangent à la courbe

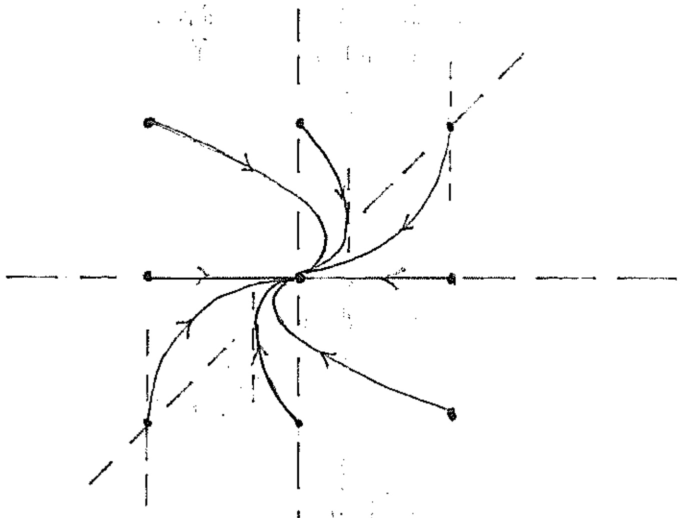
$$(x'(t), y'(t)) = ((B - A - Bt)e^{-t}, -Be^{-t}).$$

Lorsque $B \neq 0$ ce vecteur est vertical en $t = \frac{B-A}{B}$ (i.e. lorsque $x(t) = y(t)$) et pour $t > \frac{B-A}{B}$,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{t - \frac{(B-A)}{B}} > 0 \quad \text{avec} \quad lim_{t\to\infty}\frac{y'(t)}{x'(t)} = 0.$$

Ce qui montre que pour $t >> 0$ i.e. pour $(x(t), y(t))$ proche de $(0,0)$ le vecteur tangent à la courbe devient horizontal.

Ces observations, l'étude du signe des composantes du vecteur tangent, et le tracé de quelques courbes représentatives suffisent pour esquisser le portrait de phase:



2. Système linéaire associé à une matrice diagonalisable:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (E)$$

La matrice est simple de valeurs propres 1 et 3 avec pour droites propres $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ et $E_3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Les courbes solutions sont données par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Ae^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Be^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres étant strictement positives, le point stationnaire $(0,0)$ est cette fois instable: lorsque $B \neq 0$ on a

$$lim_{t \to \infty}(x(t), y(t)) = (\pm\infty, \pm\infty).$$

Lorsque $A = 0$ la trajectoire est une demi-droite de E_3 et lorsque $B = 0$ c'est une demi-droite de E_1. Les demi-plans supérieur $y > 0$ et inférieur $y < 0$ sont conservés par le flot (i.e. $y(t)$ est de signe constant). Le vecteur tangent vaut

$$(x'(t), y'(t)) = (Ae^t + 3Be^{3t}, 3Be^{3t}).$$

Lorsque $B \neq 0$ et $A \neq 0$ ce vecteur est vertical au point $t = \frac{1}{2}ln(-\frac{A}{3B})$ ce qui se produit lorsque A et B sont de signes opposés. Pour $B \neq 0$, on a

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{1 + \frac{A}{3B}e^{-2t}} > 0 \text{ lorsque } t >> 0 \text{ et } lim_{t \to \infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 1.$$

Afin de voir comment se comporte le vecteur tangent au voisinage de $(0,0)$ on observe le passé d'un point sur une trajectoire: lorsque $A \neq 0$ et $B \neq 0$ on a

$$lim_{t \to -\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$$

i.e. le vecteur tangent à une trajectoire (autre que les demi-droites propres) devient horizontal au voisinage de $(0,0)$.

Remarque: une autre manière de faire est d'observer que pour $A \neq 0$, dans la base des vecteurs propres les trajectoires sont situées sur les courbes d'équations $Y = \frac{B}{A^3}X^3$.

Voici le portrait de phase (commencer par tracer les droites propres, utiliser les observations qui précèdent, le signe des composantes du vecteur tangent et quelques trajectoires représentatives):