Université Lyon 1
L2 Mathématiques
Année 2007/2008

Introduction aux équations différentielles
Partiel du 30 Avril 2008

Exercice 1
Déterminer la solution générale $u(x,y)$ de l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dans le domaine $\Omega = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\} \subset \mathbf{R}^2$ à l'aide du changement de variables

$$X(x,y) = \frac{y}{x}, \quad Y(x,y) = xy.$$

Exercice 2
On se propose d'étudier l'espace des solutions formelles de l'équation de Legendre

$$(1-x^2)\, y''(x) - 2x\, y'(x) + \gamma(\gamma+1)\, y(x) = 0 \qquad (L_\gamma)$$

où γ est un réel arbitraire et $x \in]-1,1[$.
(1) A l'aide d'une récurrence portant sur les coefficients a_n, déterminer la solution formelle générale $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ de l'équation (L_γ).
(2) Montrer que pour chaque entier $m \in \mathbf{N}$ l'équation (L_m) admet une solution polynômiale $P_m(x)$ de degré m.
(3) Pour deux applications $f, g : [-1,+1] \to \mathbf{R}$, on pose

$$< f, g >= \int_{-1}^{+1} f(t) g(t)\, dt.$$

En utilisant uniquement les équations de Legendre, montrer que pour $n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$, on a

$$< P_n, P_m >= 0.$$

(4) On suppose que l'application polynômiale $P : [-1,+1] \to \mathbf{R}$ s'exprime comme combinaison linéaire:

$$P(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} b_n\, P_n(x), \quad b_n \in \mathbf{R}.$$

Donner une formule simple permettant de calculer les coefficients b_n.

Exercice 3

On se propose de déterminer l'évolution dans le temps des charges $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$, $t > 0$, de deux circuits électriques couplés de résistance R, de capacité C et d'inductance L et dont la constante de couplage χ vérifie $0 < \chi < 1$.

On suppose que $2\sqrt{\frac{L(1-\chi)}{C}} < R < 2\sqrt{\frac{L(1+\chi)}{C}}$.

(1) Déterminer la solution générale $Q_1(t), Q_2(t)$ du système d'équations

$$\begin{aligned} L\,Q_1''(t) + \chi\,L\,Q_2''(t) + R\,Q_1'(t) + \frac{1}{C}Q_1(t) &= 0 \\ \chi\,L\,Q_1''(t) + L\,Q_2''(t) + R\,Q_2'(t) + \frac{1}{C}Q_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

(2) Soit $E_0, \omega \in \mathbf{R}$. Donner une solution particulière des équations avec générateur sinusoidal

$$\begin{aligned} L\,Q_1''(t) + \chi\,L\,Q_2''(t) + R\,Q_1'(t) + \frac{1}{C}Q_1(t) &= E_0 sin\,\omega t \\ \chi\,L\,Q_1''(t) + L\,Q_2''(t) + R\,Q_2'(t) + \frac{1}{C}Q_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

En déduire la solution générale.

[On pourra utiliser des fonctions trigonométriques élémentaires.]