Université Lyon 1
L2 Mathématiques
2009/2010
S.P.

Equations différentielles: corrigé du DM1

Exercice 1.
(a) Solution de l'équation $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^{\alpha}(x)$:
Pour $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ on a $z'(x) = \frac{(1-\alpha)y'(x)}{y^{\alpha}(x)}$ et l'équation s'écrit

$$z'(x) = (1-\alpha)(p(x)z(x) + q(x)).$$

C'est une équation du premier ordre que l'on peut résoudre par variation de la constante. Pour ce faire on choisit une primitive $P(x)$ de $p(x)$ et on pose

$$z(x) = e^{(1-\alpha)P(x)}Z(x).$$

L'équation pour Z s'écrit

$$Z'(x) = (1-\alpha)q(x)e^{(\alpha-1)P(x)}$$

d'où

$$Z(x) = (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} q(u)e^{(\alpha-1)P(u)}du + C$$

où C est une constante réelle arbitraire.
La solution de l'équation de Bernouilli est alors donnée par $y(x) = (e^{(1-\alpha)P(x)}Z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

(b) Equation de Ricatti: $y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)$. On suppose que y_p est une solution particulière et on cherche une solution de la forme $y(x) = y_p(x) + z(x)$. L'équation pour z s'écrit

$$z'(x) = (b(x) + 2a(x)y_p(x))z(x) + a(x)z^2(x).$$

C'est donc une équation de Bernouilli.
Pour l'équation $(1-x^3)y'(x)+x^2y(x)+y^2(x)-2x = 0$, on voit que $y_p(x) = x^2$ est solution. On suppose à présent que $x^3 - 1 > 0$.
Posons $y(x) = x^2 + z(x)$. L'équation en z s'écrit

$$z'(x) = 3\frac{x^2}{x^3-1}z(x) + \frac{1}{x^3-1}z^2(x).$$

Pour résoudre cette équation de Bernouilli on pose $u(x) = \frac{1}{z(x)}$ (ici $\alpha = 2$) ce qui conduit à l'équation

$$u'(x) = -3\frac{x^2}{x^3-1}u(x) - \frac{1}{x^3-1}$$

que l'on peut résoudre par variation de la constante: observer que $ln(x^3-1)$ est une primitive de $3\frac{x^2}{x^3-1}$ et poser

$$u(x) = e^{-ln(x^3-1)}U(x) = \frac{1}{x^3-1}U(x).$$

L'équation devient $U'(x) = -1$ i.e. $U(x) = C - x$ et $u(x) = \frac{C-x}{x^3-1}$ où C est une constante réelle.

Conclusion: pour $x > 1$, la solution est $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{u(x)} = x^2 + \frac{x^3-1}{C-x}$.

De même pour $x < 1$ la solution s'écrit $y(x) = x^2 + \frac{x^3-1}{D-x}$ où D est une constante réelle. (Je ne détaille ici ni le choix des constantes C et D pour assurer $u(x) \neq 0$ dans la dérivation plus haut, ni le raccord éventuel des solutions en $x = 1$.)

Exercice 2.

Pour les portraits de phase voir la fiche (bientôt disponible) sur le tracé de courbes.

Exercice 3.

Par la fiche II de résumé on sait que l'équation $M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0$ est à différentielle exacte ssi les applications $M, N : I \times J \to \mathbf{R}$ satisfont

$$\partial_y M(x, y) = \partial_x N(x, y).$$

(a) On suppose ici que l'équation

$$u(x)M(x, y(x)) + u(x)N(x, y(x))y'(x) = 0$$

est à différentielle exacte. La condition

$$\partial_y(u \cdot M)(x, y) = \partial_x(u \cdot N)(x, y)$$

est donc satisfaite. Cette condition s'écrit

$$u(x)\partial_y M(x, y) = u'(x)N(x, y) + u(x)\partial_x N(x, y)$$

ce qui équivaut à

$$p(x, y) = \frac{\partial_y M(x, y) - \partial_x N(x, y)}{N(x, y)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

et $p(x, y) = u'(x)/u(x)$ dépend seulement de la variable x.

(b) On suppose que l'application p du (a) dépend seulement de $x \in I$ et il s'agit de vérifier que

$$\partial_y(e^P M) = \partial_x(e^P N).$$

On a

$$\partial_y(e^P M)(x,y) = e^{P(x)}\partial_y M(x,y)$$
$$\partial_x(e^P N)(x,y) = p(x)e^{P(x)}N(x,y) + e^{P(x)}\partial_x N(x,y).$$

L'égalité résulte immédiatement de la définition de p: $\partial_y M(x,y) = p(x)N(x,y)+\partial_x N(x,y)$.

(c) On considère l'équation

$$cos(x)cos(y(x)) - 2sin(x)sin(y(x))y'(x) = 0. \qquad (E)$$

On veut utiliser ce qui précède avec ici $I = J =]0,\pi[$ et

$$M(x,y) = cos(x)\,cos(y), \quad N(x,y) = -2sin(x)\,sin(y).$$

On a

$$p(x,y) = -\frac{cotan(x)}{2}.$$

L'application p dépend seulement de x et admet la primitive $P(x) = -\frac{1}{2}ln(sin(x))$. Le facteur intégrant est dès lors $e^{P(x)} = \frac{1}{\sqrt{sin(x)}}$. Par le (b), l'équation

$$\frac{cos(x)cos(y(x))}{\sqrt{sin(x)}} - 2\sqrt{sin(x)}sin(y(x))y'(x) = 0 \qquad (E')$$

est à différentielle exacte. Pour la résoudre il suffit de trouver une application

$$F :]0,\pi[\times]0,\pi[\to \mathbf{R}$$

telle que

$$\partial_x F(x,y) = \frac{cos(x)cos(y)}{\sqrt{sin(x)}}, \quad \partial_y F(x,y) = -2\sqrt{sin(x)}sin(y).$$

La première condition s'écrit

$$\partial_x F(x,y) = 2(\sqrt{sin(x)})'\,cos(y).$$

En primitivant en x on a

$$F(x,y) = 2\sqrt{sin(x)}\,cos(y) + f(y)$$

où $f :]0,\pi[\to \mathbf{R}$ est dérivable mais arbitraire. La seconde condition devient

$$\partial_y F(x,y) = -2\sqrt{sin(x)}\,sin(y) + f'(y) = -2\sqrt{sin(x)}sin(y)$$

i.e. l'application f est une constante.

Conclusion: toute solution $y(x)$ de l'équation (E) est donnée implicitement par

$$C = F(x, y(x)) = 2\sqrt{sin(x)}\,cos(y(x))$$

où C est une constante réelle arbitraire.

(d) On considère l'équation

$$(x + y(x)) + (x - y(x))y'(x) = 0.$$

Ici $M(x, y) = x + y$ et $N(x, y) = x - y$ et on a $\partial_y M(x, y) = 1 = \partial_x N(x, y)$. L'équation est donc à différentielle exacte. On cherche $F(x, y)$ telle que

$$\partial_x F(x, y) = x + y, \quad \partial_y F(x, y) = x - y.$$

En primitivant la première il vient

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + f(y)$$

et la seconde condition donne $\partial_y F(x, y) = x + f'(y) = x - y$ i.e. $f(y) = -\frac{y^2}{2} + c$ où c est une constante.

Conclusion: toute solution $y(x)$ est donnée implicitement par

$$F(x, y(x)) = x^2 - y(x)^2 + 2xy(x) = C$$

où C est une constante réelle.

Il reste à reconnaitre la courbe du plan d'équation $x^2 - y^2 + 2xy = C$ dans la base canonique.

C'est une question du cours Math IV (il me semble) sur les *coniques* du plan: en notation matricielle l'équation s'écrit

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C,$$

où $(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une forme bilinéaire symétrique dans la base canonique du plan.

On procède alors comme suit (*il s'agit de la réduction de la conique*):

(1) On commence par chercher une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice (b_{ij}).

(2) On effectue ensuite (dans l'équation) le changement de bases (de la base canonique à la base des vecteurs propres) en profitant du fait que la matrice P de ce changement de bases est orthogonale i.e. $P^{-1} = {}^tP$.

(1) Voici les valeurs propres $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, les vecteurs propres normés

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} v_+ & v_- \end{pmatrix}.$$

(2) Si l'on note (X, Y) les coordonnées dans la base (v_+, v_-) on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

et l'équation s'écrit

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sqrt{2}(X^2 - Y^2).$$

Il faut donc tracer les courbes d'équations $\frac{C}{\sqrt{2}} = X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$ dans la base orthonormée (v_+, v_-): Pour $C = 0$ c'est un cône i.e. la réunion des droites d'équations $Y = X$ et $Y = -X$. Pour $C > 0$ c'est la réunion des deux branches d'hyperbole d'axe $Y = 0$ et pour $C < 0$ la réunion des deux branches d'hyperbole d'axe $X = 0$.