Université Lyon 1
L2 Mathématiques
2009-2010
S.P.

Corrigé d'exercices

Exercice 5 (fiche 5)

Il s'agit de trouver la solution formelle par séparation de variables de l'équation de la chaleur

$$u_t = k\,u_{xx}, \quad (x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}_{\geq 0} \qquad (E)$$

(où k est un réel strictement positif) pour les conditions initiales (I) : $u(x,0) = x^2(1-x)$, $x \in [0,1]$ et les conditions aux frontières (F) : $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t \geq 0$.

Solution: (1) Faire la liste des solutions élémentaires de (E) et (F) en posant $u(x,t) = \phi(x)\tau(t)$. (E) s'écrit alors

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\tau'(t)}{k\tau(t)} = \lambda \in \mathbf{R}$$

et les conditions (F) donnent

$$\phi(0) = \phi(1) = 0 \qquad (F_x)$$

L'équation $\phi''(x) = \lambda\phi(x)$ et les conditions au bord (F_x) ont pour solutions

$$\phi_n(x) = sin(n\pi x),\ \lambda_n = -n^2\pi^2,\ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

Pour chaque n l'équation $\tau'(t) = -n^2\pi^2 k\tau(t)$ a pour solution $\tau_n(t) = exp(-kn^2\pi^2 t)$.
Les solutions élémentaires sont donc

$$u_n(x,t) = A_n\, sin(n\pi x)\, exp(-kn^2\pi^2 t),\ A_n \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

(2) Déterminer les coefficients A_n pour que la solution en série formelle

$$u(x,t) = \sum_{n>0} A_n\, exp(-kn^2\pi^2 t)\, sin(n\pi x)$$

satisfasse la condition initiale (I).
La condition (I) s'écrit

$$u(x,0) = x^2(1-x) = \sum_{n>0} A_n\, sin(n\pi x)$$

et le problème admet une solution si et seulement si $u(x,0)$ admet un développement de Fourier convergent (et dont la somme vaut $u(x,0)$) sur l'intervalle $[0,1]$. C'est le cas (cf la fin du résumé 3) car l'application continument dérivable $u(x,0)$ étant nulle en $x=0$ et $x=1$ se prolonge en une fonction impaire de période 2 sur $\mathbf{R}$ qui elle admet un développement en sinus convergent. Les coefficients sont donnés explicitement (cf résumé 3) par

$$A_n = 2\int_0^1 x^2(1-x)\,sin(n\pi x)\,dx.$$

En intégrant par parties je trouve (c'est un peu long)

$$A_n = \frac{4}{n^3\pi^3}(2(-1)^{n+1}-1).$$

Exercice 2 (fiche Laplace (suite))

On veut résoudre par transformée de Laplace l'équation

$$u_x(x,t)+u_t(x,t)+u(x,t)=f(t), \quad x\geq 0,\, t\geq 0$$

sous les conditions $u(x,0)=(1-e^{-x})$, $x\geq 0$ et $u(0,t)=0$, $t\geq 0$.

Solution: on commence par prendre la transformée (en variable t) de l'équation: Posons $U(x,p)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt$. Pour le calcul de $\int_0^\infty u_x(x,t)e^{-pt}dt$ on suppose que l'on peut permuter dérivée partielle en x et intégrale impropre en t i.e. on écrira

$$\int_0^\infty u_x(x,t)e^{-pt}dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt = U_x(x,p).$$

Quant à $\int_0^\infty u_t(x,t)e^{-pt}dt$ on intègre par parties en posant $v'=u_t(x,t)$ comme dans le cas usuel.

La transformée de Laplace de l'équation s'écrit alors

$$U_x(x,p)+p\,U(x,p)-u(x,0)+U(x,p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = F(p)$$

i.e.

$$U_x(x,p)+(p+1)U(x,p)=F(p)+u(x,0)$$

C'est une équation inhomogène du premier ordre en U que l'on peut résoudre par variation de la constante: si l'on pose

$$U(x,p)=C(x,p)e^{-(p+1)x}$$

cette équation est équivalente à

$$C_x(x,p)=(F(p)+u(x,0))e^{(p+1)x}$$

d' où
$$U(x,p) = (\int_0^x (F(p) + u(x',0))e^{(p+1)x'}dx' + K(p))e^{-(p+1)x}.$$
La condition au bord $u(0,t) = 0$ s'écrit $U(0,p) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-pt}dt = 0$ ce qui donne
$$0 = K(p).$$

En conclusion
$$\begin{aligned} U(x,p) &= F(p)\frac{e^{(p+1)x} - 1}{p+1}e^{-(p+1)x} + (\int_0^x (1 - e^{-x'})e^{(p+1)x'}dx')e^{-(p+1)x} \\ &= \frac{(F(p)+1)}{p+1}(1 - e^{-(p+1)x}) + \frac{(e^{-(p+1)x} - e^{-x})}{p}. \end{aligned}$$
Il reste à écrire la transformée de Laplace inverse $u(x,t)$ en considérant la variable x comme un paramètre.
Notons $H_x(t)$ l'échelon de Heaviside en x et écrivons $f(t) \mapsto F(p)$ pour signifier *$F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$*.
On a $H_x(t) \mapsto \frac{e^{-px}}{p}$, dès lors $e^{-x}H_x(t) \mapsto \frac{e^{-(p+1)x}}{p}$ et $e^{-x}H_0(t) = e^{-x} \mapsto \frac{e^{-x}}{p}$.
On a $e^{-t} \mapsto \frac{1}{p+1}$, $\int_0^t f(t-s)e^{-s}ds \mapsto \frac{F(p)}{p+1}$. On sait que si $g(t) \mapsto G(p)$ et $a \geq 0$ alors $H_a(t)g(t-a) \mapsto G(p)e^{-pa}$. D'où
$$e^{-x}\, H_x(t) \int_0^{t-x} f(t-x-s)e^{-s}ds \mapsto \frac{F(p)}{p+1}e^{-(p+1)x}.$$
On obtient de même
$$H_x(t)e^{-t} \mapsto \frac{e^{-(p+1)x}}{p+1}.$$

En conclusion la transformée inverse s'écrit (en suivant l'ordre des termes de $U(x,p)$) pour $t \geq 0$, $x \geq 0$:
$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t f(t-s)e^{-s}ds + e^{-t} - e^{-x}H_x(t) \int_0^{t-x} f(t-x-s)e^{-s}ds \\ - H_x(t)e^{-t} + H_x(t)e^{-x} - e^{-x}. \end{aligned}$$
Pour $t > x$ on a donc
$$u_>(x,t) = \int_0^t f(t-s)e^{-s}ds - e^{-x}\int_0^{t-x} f(t-x-s)e^{-s}ds$$
et pour $t < x$
$$u_<(x,t) = \int_0^t f(t-s)e^{-s}ds + e^{-t} - e^{-x}.$$

Observer que $lim_{t\to x}u_>(x,t) = lim_{t\to x}u_<(x,t)$.