Université Lyon 1
Licence de Mathématiques
Année 2009-2010

Introduction aux équations différentielles
Corrigé du CC2

Exercice 1. Pour des complexes $u, v, w \in \mathbf{C}$ deux à deux distincts, décrire une méthode simple pour trouver une application $f : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{C} : t \mapsto f(t)$ telle que

$$L(f)(p) = \frac{1}{(p-u)^k (p-v)^l (p-w)^m}.$$

Solution:
- La méthode la plus simple consiste à faire un développement de la transformée de Laplace $L(f)(p)$ en éléments simples:

$$\frac{1}{(p-u)^k (p-v)^l (p-w)^m} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{a_\alpha}{(p-u)^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{l} \frac{b_\beta}{(p-v)^\beta} + \sum_{\gamma=1}^{m} \frac{c_\gamma}{(p-w)^\gamma}.$$

On utilise ensuite la transformée connue $L(\frac{t^n}{n!})(p) = \frac{1}{p^{n+1}}$ et le fait que si $G(p)$ est la transformée de Laplace de $g(t)$ alors $G(p-r)$ est la transformée de $g(t)exp(rt)$. Ce qui donne, pour $t \geq 0$,

$$f(t) = \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{ut} + \sum_{\beta=1}^{l} b_\beta \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} e^{vt} + \sum_{\gamma=1}^{m} c_\gamma \frac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!} e^{wt}.$$

Biensûr dans toute situation concrète il faut expliciter les coefficients $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$.

- Une autre méthode consiste à commencer par observer que $\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{ut}$ a pour transformée $\frac{1}{(p-u)^k}$ et de même pour les facteurs en v et w et ensuite à utiliser la convolution: si $G(p)$ est la transformée de $g(t)$ et $H(p)$ la transformée de $h(t)$ alors $G(p)\, H(p)$ est la transformée de $\int_0^t g(t-s)h(s)ds$. Deux convolutions successives permettent ici d'obtenir $f(t)$.

Remarque: la première méthode décrite dans cet exercice est très utilisée. Je vous la conseille dès que la transformée de Laplace contient une fraction rationnelle $P(p)/Q(p)$ où P et Q sont deux polynômes avec deg $(P) <$ deg (Q). Plus généralement, une idée directrice pour les transformées de Laplace inverses est de décomposer la transformée en somme de produits de fonctions plus simples dont on connait, par les tables, la transformée de Laplace et de reconstituer ensuite la transformée inverse par sommes de produits de convolution. Voir l'exercice 2 pour un exemple de ceci.

Exercice 2. Soit $g(t)$ une application de transformée $G(p)$ et r un réel. On cherche une application $f : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}$ telle que

$$L(f)(p) = \frac{G(p)}{(p-1)(p^2+2)} e^{-pr}.$$

On considère séparément les facteurs de $L(f)(p)$:
- Pour a réel, $sin(at)$ a pour transformée $\frac{a}{(p^2+a^2)}$ et e^t a pour transformée $\frac{1}{p-1}$. Dès lors la convolution $\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t e^{t-s}\, sin(\sqrt{2}s)ds$ a pour transformée $\frac{1}{(p-1)(p^2+2)}$.
- La double convolution

$$\int_0^t g(t-u)\, (\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^u e^{u-s}\, sin(\sqrt{2}s)ds)\, du$$

a donc pour transformée $\frac{G(p)}{(p-1)(p^2+2)}$.
- On utilise enfin le fait que si $H(p)$ est la transformée de $h(t)$ alors $H(p)e^{-pr}$ est la transformée de $\eta(t-r)h(t-r)$ où $\eta(t-r)$ est l'échelon de Heaviside en r (il est noté $H_r(t)$ dans la table). En conclusion, la fonction recherchée est donnée, pour $t \geq 0$, par

$$\eta(t-r) \int_0^{t-r} g(t-r-u)\, (\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^u e^{u-s}\, sin(\sqrt{2}s)ds)\ du.$$

Pour expliciter $\int_0^u e^{u-s}\, sin(\sqrt{2}s)ds$ on procède par partie.
Remarque: Pour la première partie, on aurait pu utiliser la décomposition de $\frac{1}{(p-1)(p^2+2)}$ en éléments simples.

Exercice 3.
La transformée de Laplace de l'équation $u'''(t) = w(t)$ donne

$$p^3 L(u)(p) - p^2 u(0) - pu'(0) - u''(0) = L(w)(p) = \int_T^{2T} e^{-pt} dt.$$

En imposant les conditions initiales $u(0) = 0 = u'(0)$ on a donc

$$L(u)(p) = \frac{1}{p^4}(e^{-pT} - e^{-2pT}) + \frac{u''(0)}{p^3}.$$

En procédant comme dans l'exercice 2 la transformée inverse s'écrit

$$u(t) = \eta(t-T)\, \frac{(t-T)^3}{3!} - \eta(t-2T)\, \frac{(t-2T)^3}{3!} + u''(0)\frac{t^2}{2}.$$

Reste à imposer la condition $u''(3T) = 1$: pour $t > 2T$ on a

$$u(t) = \frac{(t-T)^3}{3!} - \frac{(t-2T)^3}{3!} + u''(0)\frac{t^2}{2}.$$

Par un calcul immédiat on a $u''(t) = u''(0) + T$, $t \geq 2T$, et la condition donne $u''(0) = 1 - T$.