Université Lyon 1
L2 Mathématiques
Année 2009-2010

Introduction aux équations différentielles
CC2: Transformées de Laplace.

La table de transformées de Laplace est autorisée.

Exercice 1
Soient $u, v, w \in \mathbf{C}$ deux à deux distincts et $k, l, m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.
Décrire une méthode (simple) permettant de déterminer une application

$$f : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{C} : t \mapsto f(t)$$

telle que

$$L(f)(p) = \frac{1}{(p-u)^k (p-v)^l (p-w)^m}.$$

Exercice 2
Soit $g : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}$ une application de transformée de Laplace $L(g)(p) = G(p)$ et un réel $r \in \mathbf{R}$.
Donner une application $f : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R} : t \mapsto f(t)$ telle que

$$L(f)(p) = \frac{G(p)}{(p-1)(p^2+2)} e^{-pr}.$$

(Indication: Procéder par étapes.)

Exercice 3
Soit $T > 0$ un réel, $I = [T, 2T] \subset \mathbf{R}$ et $w : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R} : t \mapsto w(t)$ l'application définie par

$$w(t) = 1 \text{ pour } t \in I; \quad w(t) = 0 \text{ pour } t \notin I.$$

Utiliser la transformée de Laplace pour trouver la solution u de l'équation

$$u'''(t) = w(t)$$

vérifiant $u(0) = u'(0) = 0$ et $u''(3T) = 1$.