Université LYON 1
L2 Mathématiques
Année 2009/2010
S.P.

Introduction aux Equations Différentielles.

Résumé de Travaux Dirigés II

I. Equations d'ordre n.

Soient $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $x : I \to \mathbf{R} : x \mapsto x(t)$ une application de classe C^n. La dérivée $k-$ième de x est notée $x^{(k)}$.
On cherche la solution générale $x : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ de l'équation

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = b(t) \qquad (E)$$

où $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbf{R}$ et $b : I \to \mathbf{R}$ sont continues.

L'observation principale faite en TD est la suivante: Soit $A(t) = (a_{ij})$ la matrice carrée de taille n dont les seules composantes non nulles sont $a_{12} = a_{23} = \ldots = a_{n-1\,n} = 1$ et $a_{n1} = -a_n(t), a_{n2} = -a_{n-1}(t), \ldots, a_{nn} = -a_1(t)$.

L'application $x : I \mapsto \mathbf{R}$ est solution de l'équation (E) si et seulement si l'application

$$X : I \to \mathbf{R}^n : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

est solution de l'équation

$$X'(t) = A(t)X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \qquad (E')$$

Cette observation nous donne une *première méthode* de résolution de (E): on commence par chercher la solution vectorielle générale $X(t)$ de l'équation (E') (dans certains cas on pourra utiliser le resumé I). La solution générale de l'équation (E) est alors la première composante de $X(t)$.

Voici deux cas particuliers pour lesquels on dispose de recettes simples de résolution (sans expliciter le système (E')).

Equation homogène à coefficients constants: lorsque $b(t) = 0$ et les coefficients a_i de (E) sont constants, on obtient directement une base de n solutions de l'équation (E) comme suit: On considère l'équation caractéristique de (E):

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

- A toute racine λ réelle de multiplicité r on associe les r solutions

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$$

- A toute paire de racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ de multiplicité s on associe les $2s$ solutions

$$e^{\alpha t} cos(\beta t),\ te^{\alpha t} cos(\beta t), \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t} cos(\beta t),$$
$$e^{\alpha t} sin(\beta t),\ te^{\alpha t} sin(\beta t), \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t} sin(\beta t).$$

En associant à chaque racine de $\chi_A(\lambda)$ ces r ou $2s$ solutions, on obtient n solutions indépendantes $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$.

Les solutions $x : I \to \mathbf{R}$ de l'équation homogène (E) sont alors

$$x(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \ldots + C_n\phi_n(t)$$

où $C_1, \ldots, C_n \in \mathbf{R}$ sont arbitraires.

Equation inhomogène à coefficients constants: la solution générale de l'équation (E) est bien sûr toujours la somme de la solution générale pour $b(t) = 0$ et d'une solution particulière de l'équation complète. Lorsque $b(t)$ est une application simple, par exemple $b(t) = sin\,(\omega t)$ (plus généralement un polynôme trigonométrique), on peut souvent trouver une solution particulière de (E) en essayant des solutions simples, par exemple on cherche à déterminer les constantes A, B pour que $A\,cos(\omega t) + B\,sin(\omega t)$ soit une solution (plus généralement on teste un polynôme trigonométrique).

Exemple: Soit $\omega \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Résoudre

$$x^{(3)} + x^{(2)} + x^{(1)} = cos\,\omega t \qquad (E)$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^1 = 0$$

dont les racines sont 0, $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$x_H(t) = C_1 + C_2e^{-\frac{t}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}) + C_3e^{-\frac{t}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

Pour obtenir une solution particulière x_I de l'équation complète on teste

$$x_I(t) = A\,cos(\omega t) + B\,sin(\omega t)$$

Un calcul imédiat montre que x_I est une solution ssi

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - 1 & -\omega \\ -\omega^2 & \omega(1-\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\omega \neq 0$ ce système admet une solution unique pour A et B. La solution de l'équation complète s'écrit alors

$$x(t) = x_H(t) + x_I(t).$$

Pour un exemple de traitement différent de l'équation d'ordre 2 à coefficients non constants voir l'exercice 13 de la fiche 1 (suite).

Méthode des séries formelles (voir par exemple l'équation d'Hermite de l'exercice 16 fiche 1 (suite)) : Lorsque $a_1(t), \ldots a_n(t)$ et $b(t)$ dans l'équation (E) sont des polynômes ou des séries entières convergentes, on peut obtenir la solution générale en procédant formellement: poser $x(t) = \sum_{n\geq 0} x_n t^n$, dériver termes à termes ($x'(t) = \sum_{n\geq 1} n x_n t^{n-1}$, $x''(t) = \ldots$). (E) est alors équivalente à une équation de récurrence pour les coefficients x_n de la série $x(t)$. Après avoir résolu cette récurrence on détermine le rayon de convergence de la série $x(t)$.

II. Mouvements de systèmes dynamiques proches d'une configuration d'équilibre.

Les équations de Lagrange (cf par exemple l'exercice 17, fiche 1 (suite)) conduisent (le plus souvent) à une équation du type

$$AX''(t) + BX'(t) + CX(t) = D(t)$$

pour une inconnue vectorielle $X : [0, \infty[\to \mathbf{R}^n : t \mapsto X(t)$. Ici $A, B, C \in Mat(n, \mathbf{R})$ et $D : [0, \infty[\to \mathbf{R}^n$ est une application vectorielle.

Pour la résoudre, on utilise le calcul matriciel pour tenter de découpler les $n-$ équations: par exemple, s'il existe une matrice P inversible telle que simultanément

$$P^{-1}AP, \quad P^{-1}BP, \quad P^{-1}CP$$

soient diagonales, on pose $X(t) = PY(t)$. L'équation

$$P^{-1}APY''(t) + P^{-1}BPY'(t) + P^{-1}CPY(t) = P^{-1}D(t)$$

est alors équivalente à n équations découplées de la forme

$$a_i y_i''(t) + b_i y_i'(t) + c_i y_i(t) = f_i(t), \quad 1 \leq i \leq n,$$

que l'on sait résoudre par la méthode décrite au point **I**.

III. Jacobienne, équations à différentielle exacte, changements de variables.

Soit $U \subset \mathbf{R}^m$ un ouvert et

$$\begin{aligned} &f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \\ &\big(x_1, x_2, \ldots, x_m\big) \mapsto \big(f_1(x_1, \ldots, x_m), f_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)\big) \end{aligned}$$

une application différentiable sur U.

La Jacobienne de f au point $(t_1, \ldots, t_m) \in U$ est la matrice de type (n, m) définie par

$$J(f)(t_1, \ldots, t_m) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t_1, \ldots, t_m))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}.$$

Règle d'Or: pour $f : U \subset \mathbf{R}^m \to f(U) \subset \mathbf{R}^n$ et $g : W \subset f(U) \to \mathbf{R}^p$ différentiables, on a

$$J(g \circ f)(t_1, \ldots, t_m) = J(g)(f(t_1, \ldots, t_m)) \cdot J(f)(t_1, \ldots, t_m).$$

Notations: pour une application différentiable $u : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ on utilise souvent les 3 notations suivantes $u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} = \partial_{x_j} u$.

Exemples: pour l'application $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} : (x, y, z) \mapsto xyz\, cos(xy)$, on a

$$\begin{aligned} J(u)(x, y, z) &= (u_x\, u_y\, u_z) \\ &= (yz\, cos(xy) - xy^2 z\, sin(xy) \quad xz\, cos(xy) - x^2 yz\, sin(xy) \quad xycos(xy)) \end{aligned}$$

pour l'application $f : \mathbf{I} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3 : t \mapsto (t, t^2, e^t)$, on a

$$J(f)(t) = f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

pour $u \circ f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned}(u \circ f)'(t) &= J(u \circ f)(t) = J(u)(t, t^2, e^t) \cdot J(f)(t) \\ &= \begin{pmatrix} t^2 e^t cos(t^3) - t^5 e^t sin(t^3) & te^t cos(t^3) - t^4 e^t sin(t^3) & t^3 cos(t^3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Equations à différentielle exacte.
Soient $I, J \subset \mathbf{R}$ deux intervalles et $M, N : I \times J \to \mathbf{R}$ deux applications. On suppose que M et N admettent des dérivées partielles continues à l'ordre 2 sur $I \times J$.
On dit que l'équation différentielle

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x) = 0 \qquad (E)$$

d'inconnue $y : I \to J$ est à différentielle exacte s'il existe une application

$$F : I \times J \to \mathbf{R} : (x, y) \mapsto F(x, y)$$

telle que

$$\partial_x F\,(x, y) = M(x, y), \quad \partial_y F\,(x, y) = N(x, y), \quad \text{pour tout } (x, y) \in I \times J.$$

Dans ce cas toute solution $y : I \to J : x \mapsto y(x)$ est donnée implicitement par l'équation

$$F(x, y(x)) = C$$

où C est une constante réelle. Voici pourquoi:
Soit l'application $j : I \to I \times J : x \mapsto (x, y(x))$. On va calculer la jacobienne de l'application $F \circ j(x) = F(x, y(x))$. Par la règle de composition, on a

$$\begin{aligned}J(F \circ j)(x) &= J(F)(x, y(x)) \cdot J(j)(x) \\ &= \big(\partial_x F\,(x, y(x)),\, \partial_y F\,(x, y(x))\big) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \\ &= \partial_x F\,(x, y(x)) + \partial_y F\,(x, y(x))\, y'(x) \\ &= M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x)\end{aligned}$$

Dès lors $y : I \to J$ est solution de l'équation (E) ssi $J(F \circ j)$ est nulle sur I ssi $F(x, y(x)) = C$, $x \in I$.
Caveat: Il n'est pas toujours évident d'extraire de cette équation implicite la forme explicite de la solution $y(x)$.
Résoudre une équation à différentielle exacte signifie déterminer explicitement l'application F (mais pas nécessairement $y(x)$).

Proposition: pour que l'équation (E) soit à différentielle exacte sur le pavé $I \times J$ il faut et il suffit que
$$\partial y M\,(x, y) = \partial_x N\,(x, y), \qquad \text{pour tout } (x, y) \in I \times J.$$

Facteur intégrant: supposons que l'équation (E) ne soit pas à différentielle exacte. On appelle facteur intégrant de l'équation (E) toute application $u : I \times J \to \mathbf{R}$ ne s'annulant pas sur $I \times J$ et telle que l'équation

$$u(x, y(x))M(x, y(x)) + u(x, y(x))N(x, y(x))\, y'(x) = 0$$

soit à différentielle exacte. (*L'exercice 3 du DM1 porte sur la recherche d'un facteur intégrant explicite.*)

Changements de variables: le cas $n = m = 2$.
On considère deux ouverts U et V de $\mathbf{R}^2$ et on suppose que

$$P : U \to V$$

est une application bijective différentiable. On note (x, y) les coordonnées d'un point de U et (X, Y) celles d'un point de V. Pour une application différentiable $w : V \to \mathbf{R}$ on pose

$$u(x, y) = (w \circ P)(x, y)$$

i.e. $u(x, y) = w(X(x, y), Y(x, y))$.
La règle de composition des dérivées $J(u)(x, y) = J(w \circ P)(x, y) = J(w)(P(x, y)) \cdot J(P)(x, y)$ donne alors
$$(u_x \; u_y) = (w_X \circ P \; w_Y \circ P) \cdot \begin{pmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{pmatrix}$$
i.e.
$$\begin{array}{l} (w \circ P)_x = u_x = (w_X \circ P)X_x + (w_Y \circ P)Y_x \\ (w \circ P)_y = u_y = (w_X \circ P)X_y + (w_Y \circ P)Y_y \end{array}.$$
Il est important d'observer que ces égalités sont vraies pour **toute** application différentiable $w : V \to \mathbf{R}$, en particulier elles sont vraies pour les applications $w_X, w_Y : V \to \mathbf{R}$ ce qui permet de calculer les dérivées partielles secondes u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}.
Par exemple,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (w_X \circ P)_x X_x + (w_X \circ P)X_{xx} + (w_Y \circ P)_x Y_x + (w_Y \circ P)Y_{xx} \\ &= ((w_{XX} \circ P)X_x + (w_{XY} \circ P)Y_x)X_x + (w_X \circ P)X_{xx} \\ &\quad + ((w_{YX} \circ P)X_x + (w_{YY} \circ P)Y_x)Y_x + (w_Y \circ P)Y_{xx} \\ &= (w_{XX} \circ P)X_x^2 + (w_{YY} \circ P)Y_x^2 + 2(w_{XY} \circ P)X_x Y_x \\ &\quad + (w_X \circ P)X_{xx} + (w_Y \circ P)Y_{xx} \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé le fait que pour des applications w dont les dérivées partielles successives sont continues on a $w_{XY} = w_{YX}$.

Ce type de changement de variables $(x, y) \mapsto (X, Y)$ un peu fastidieux intervient lorsque l'on cherche à simplifier l'expression d' une équation aux dérivées partielles. L'exemple caractéristique étant l'équation des ondes
$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

En posant $X(x,t) = x - ct$, $Y(x,t) = x + ct$ et $w(X(x,t), Y(x,t)) = u(x,t)$ l'équation se transforme en

$$w_{XY} = 0$$

dont les solutions sont

$$w(X,Y) = f(X) + g(Y)$$

où $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont dérivables arbitraires. En revenant aux variables initiales on obtient la solution générale (dite de d' Alembert)

$$u(x,t) = w(x - ct, x + ct) = f(x - ct) + g(x + ct)$$