Université Lyon 1
L2 Mathématiques

Equations différentielles. Corrigé du partiel d'avril 2008.

Exercice 1

Le changement de variables P est donné par $X(x,y) = \frac{y}{x}$ et $Y(x,y) = xy$. On a donc pour $u(x,y) = W \circ P(x,y) = W(X(x,y), Y(x,y))$:

$$u_x = W_X X_x + W_Y Y_x = -W_X \frac{y}{x^2} + W_Y y$$
$$u_y = W_X X_y + W_Y Y_y = W_X \frac{1}{x} + W_Y x.$$

Pour les dérivées secondes:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -(W_X)_x \frac{y}{x^2} - W_X (\frac{y}{x^2})_x + (W_Y)_x y \\ &= -(W_{XX} X_x + W_{XY} Y_x) \frac{y}{x^2} + W_X \frac{2y}{x^3} + (W_{YX} X_x + W_{YY} Y_x) y \\ &= \frac{y^2}{x^4} W_{XX} + y^2 W_{YY} - 2\frac{y^2}{x^2} W_{XY} + \frac{2y}{x^3} W_X. \end{aligned}$$

Un calcul analogue donne:

$$u_{yy} = \frac{1}{x^2} W_{XX} + 2W_{XY} + x^2 W_{YY}.$$

L'équation $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ s'écrit alors

$$-4y^2 W_{XY}(P(x,y)) + 2\frac{y}{x} W_X(P(x,y)) = 0$$

ou encore en variables X, Y:

$$-2Y W_{XY} + W_X = 0.$$

Pour la résoudre, observer qu'en posant $Z(X,Y) = W_X(X,Y)$ l'équation s'écrit

$$Z_Y - \frac{1}{2Y} Z = 0.$$

La substitution usuelle $Z(X,Y) = e^{\int \frac{1}{2Y} dY} \phi(X,Y)$ donne $\phi_Y = 0$ i.e. $\phi(X,Y) = f(X)$ et donc $Z(X,Y) = e^{ln\sqrt{Y}} f(X) = \sqrt{Y} f(X)$. Enfin $W_X = Z(X,Y) = \sqrt{Y} f(X)$ donne $W(X,Y) = \sqrt{Y} \int f(X) dX + g(Y)$. Puisque f est arbitraire, la primitive $\int f(X) dX = h(X)$ est une fonction arbitraire de X. On peut donc écrire

$$W(X,Y) = \sqrt{Y} h(X) + g(Y)$$

i.e.

$$u(x,y) = \sqrt{xy}\, h(\frac{y}{x}) + g(xy), \quad h, g \text{ deux fois dérivables, arbitraires.}$$

Exercice 2

(1) On dérive formellement: si $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ on a

$$y'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n\, n\, x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n \geq 2} a_n\, n(n-1)\, x^{n-2}.$$

L'équation de Legendre (L_γ) s'écrit alors

$$\sum_{m\geq 0} x^m\left((m+2)(m+1)a_{m+2} - m(m-1)a_m - 2ma_m + \gamma(\gamma+1)a_m\right) = 0.$$

Ce qui donne la récurrence

$$a_{m+2} = \frac{\big(m(m+1) - \gamma(\gamma+1)\big)}{(m+2)(m+1)} a_m, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Pour la résoudre, on distingue les cas $m = 2n$ et $m = 2n+1$ pour obtenir

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= a_0 \frac{[2n(2n+1) - \gamma(\gamma+1)]}{(2n+2)!} \\ a_{2n+3} &= a_1 \frac{[(2n+1)(2n+2) - \gamma(\gamma+1)]}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

où

$$[2n(2n+1) - \gamma(\gamma+1)] = (2n(2n+1) - \gamma(\gamma+1))\left((2n-2)(2n-1) - \gamma(\gamma+1)\right)\cdots(-\gamma(\gamma+1))$$

et une expression du même type pour $[(2n+1)(2n+2) - \gamma(\gamma+1)]$. L'espace des solutions formelles est donc de dimension 2 sur $\mathbf{R}$ avec pour base les deux séries paire et impaire que l'on vient de déterminer.

(2) Si γ est l'entier pair $2n$ prendre $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. La formule qui précède montre alors que $a_{2k+2} = 0$ pour tout $k \geq n$. Si γ est l'entier impair $2n+1$ prendre $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et observer que $a_{2k+3} = 0$ pour tout $k \geq n$.

(3) Pour obtenir l'orthogonalité $< P_m, P_n >= 0$ pour $n \neq m$ on se sert des équations (L_m) et (L_n). On a

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n &= 0 \\ (1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m &= 0 \end{aligned}$$

En multipliant la première par P_m, la seconde par P_n et en soustrayant il vient

$$(1-x^2)(P_n''P_m - P_m''P_n) - 2x(P_n'P_m - P_m'P_n) + (n(n+1) - m(m+1))P_nP_m = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx}\big((1-x^2)(P_n'P_m - P_m'P_n)\big) = (m(m+1) - n(n+1))P_nP_m.$$

En prenant l'intégrale $\int_{-1}^{1}$ dans cette équation il vient

$$0 = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx.$$

(4) Observer que $P(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_nP_n(x)$ est une somme finie puisque $P(x)$ est polynomiale. Par linéarité de l'intégrale on a alors

$$\int_{-1}^{1} P(x)P_m(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = b_m \int_{-1}^{1} P_m(x)^2dx.$$

Conclusion:

$$b_m = \frac{\int_{-1}^{1} P(x)P_m(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_m(x)^2dx}.$$

Exercice 3

Cet exercice étant standard, je serai très succinct.

(1) L'objectif est d'obtenir deux équations découplées (i.e. ne contenant chacune qu'une fonction à déterminer). Il y a deux manières de faire

(i) écrire le système sous forme matricielle, diagonaliser la matrice 2 par 2 symétrique $\begin{pmatrix} L & \chi L \\ \chi L & L \end{pmatrix}$ et faire le changement de variables $\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ où P est la matrice des vecteurs propres de $\begin{pmatrix} L & \chi L \\ \chi L & L \end{pmatrix}$,

ou bien (et c'est équivalent)

(ii) manipuler les équations directement.

Voici comment faire (ii): additionner et soustraire les équations pour obtenir les équations

$$L(1+\chi)(Q_1'' + Q_2'') + R(Q_1' + Q_2') + \frac{1}{C}(Q_1 + Q_2) = 0$$
$$L(1-\chi)(Q_1'' - Q_2'') + R(Q_1' - Q_2') + \frac{1}{C}(Q_1 - Q_2) = 0.$$

pour les variables $Q_1 \pm Q_2$ que l'on sait résoudre par la méthode de l'équation caractéristique.

(2) On commence comme à la question (1) pour obtenir les deux équations

$$L(1 \pm \chi) Z_\pm'' + R\, Z_\pm' + \frac{1}{C}\, Z_\pm = E_0\, sin\, \omega t$$

où $Z_\pm(t) = Q_1(t) \pm Q_2(t)$.

Pour obtenir une solution particulière de ces équations, on pose

$$Z_\pm(t) = \alpha\, cos\, \omega t + \beta\, sin\, \omega t,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

L'équation pour $Z_\pm$ devient alors un système d'équations linéaires en α et β que l'on peut résoudre explicitement.

La solution générale est la somme des solutions obtenues en (1) et (2).