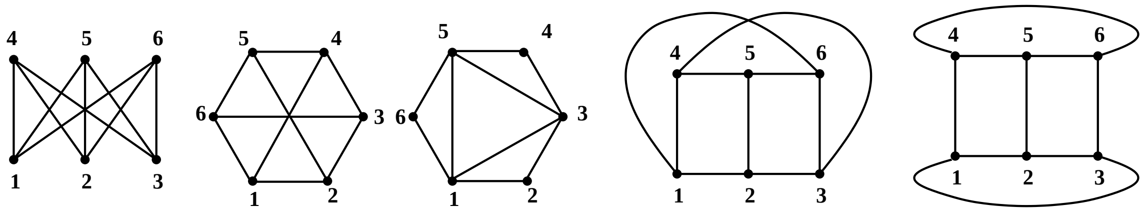
TD Graphes, langages et automates

Theresia Eisenkölbl

Semestre Printemps 2010

1. Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 définis par
$V(G_1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_1) = \{e, f, g, h\}$,
$\psi_{G_1}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_1}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_1}(g) = \{3, 4\}, \psi_{G_1}(h) = \{4, 1\}$,
$V(G_2) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_2) = \{e, f, g, h\}$,
$\psi_{G_2}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_2}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_2}(g) = \{3, 1\}, \psi_{G_2}(h) = \{4, 1\}$,
G_3 est le graphe complet K_3 et G_4 est le graphe complet K_4.

2. Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes suivants.



3. Représenter par un diagramme le graphe G avec matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer les inégalités suivantes :

$$\min_{v \in V} d(v) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \max_{v \in V} d(v).$$

5. Montrer que dans un graphe simple avec au moins deux sommets il y a deux sommets de même degré.

6. Le complement G^c de G est le graphe avec sommets $V(G)$ dont deux sont liés par une arête si et seulement s'ils ne sont pas liés par une aréte dans G.
Trouver une déscription simple de $K^c_{m,n}$.

7. Un graphe est *auto-complementaire*, si $G \cong G^c$.

(a) Montrer que dans un graphe auto-complementaire on a $|V| \equiv 0,1 \mod 4$.

(b) Trouver deux graphes tels que $G^c \cong G$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $V = \{0,1\}^n$, c.à.d. V soit l'ensemble des 0-1–suites de longueur n. Deux sommets forment une arête ssi les suites diffèrent dans exactement une coordonnée.

Ce graphe s'appelle cube de dimension n. Déterminer

(a) le nombre des arêtes

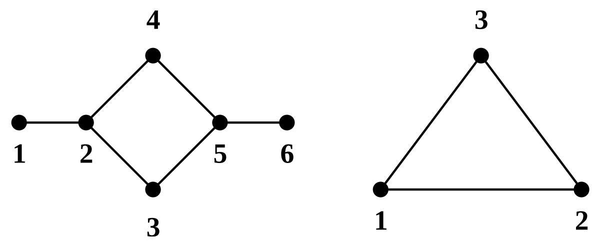
(b) les degrés des sommets

(c) la distance maximale des deux sommets dans ce graphe.

9. Un isomorphisme de G dans G est un *automorphisme* de G.

(a) Montrer que : Les automorphismes d'un graphe G forment un groupe avec l'opération de composition de fonctions.

(b) Trouver les groupes d'automorphismes des graphes suivants.



(c) Trouver les groupes d'automorphismes de K_n.

(d) Montrer que G et G^c ont les mêmes automorphismes.

10. Soit G un graphe biparti avec bipartition $V = X \cup Y$ de sommets.

En plus, le graphe G soit régulier de degré $d > 0$, c.à.d. chaque sommet a le même degré $d > 0$.

Montrer que : Les ensembles X et Y ont la même cardinalité.

11. Quels graphes des exercices 1 et 2 sont bipartis ?

12. Trouver une caractérisation des matrices d'incidence et adjacence des graphes bipartis.

13. Montrer que si G est simple, alors

$$|E(G)| \leq \binom{|V(G)|}{2}.$$

14. Soit G un graphe connexe avec au moins deux sommets. Montrer qu'il existe au moins un sommet x tel que le sous-graphe G_x obtenu en supprimant x et les arêtes incidentes à x est connexe.

15. Soit G un graphe simple à n sommets, p arètes et k composantes connexes. Montrer que

$$n - k \leq p \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

16. (a) Trouver les matrices d'adjacence des graphes d'exercice **2**.

(b) Trouver les nombres des chaînes de longueur 3 de sommet 1 à sommet 2 dans chaque graphe.

(c) Trouver les nombres de toutes les chaînes fermeés de longueur 3 dans chaque graphe.

17. Montrer qu'une arête e qui appartient à une chaine fermée a-simple, appartient toujours à un cycle.

18. Soit T un arbre.
Montrer qu'entre chaque paire $x, y \in V(T)$ il existe un unique chemin s-simple.

19. Montrer que les propriétés suivantes d'un graphe G avec $|V(G)| \neq 0$ sont équivalentes :

(a) G est un arbre

(b) G est un graphe maximal sans cycle (c.à.d. on obtient un cycle si on ajoute une arête arbitraire).

(c) G est un graphe minimal connexe.

(d) G est un graphe sans cycle et $|V| = |E| + 1$.

(e) G est un graphe connexe et $|V| = |E| + 1$.

20. Combien d'arbres couvrant contient le graphe K_6 ? Combien d'entre eux sont des arbres non-isomorphes ?

21. Écrire une liste de tous les arbres étiquetés à 4 sommets et les listes d'entiers correspondantes par la bijection de Prüfer.

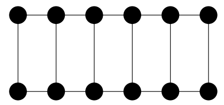
22. Comment est-ce qu'on peut recuperer les degrés des sommets d'un arbre du code de Prüfer ?

23. Utiliser la formule de recurrence pour τ à calculer $\tau(K_{3,3})$ et $\tau(K_4)$.

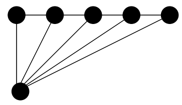
24. Modifier la récurrence $\tau(G) = \tau(G \setminus e) + \tau(G \cdot e)$ pour trouver la somme de poids de tous les arbres couvrants dans un graphe avec arêtes ponderées.

(Le poids d'un arbre est le produit des poids de ses arêtes.)

25. Trouver le nombre des arbres couvrants de l'échelle L_6 à 12 sommets et de l'éventail F_5 à 6 sommets.

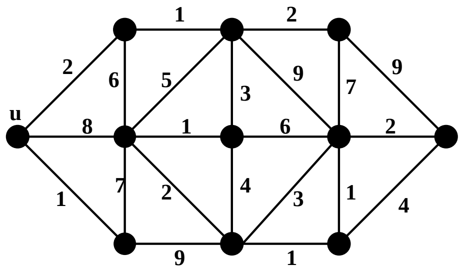


L_6

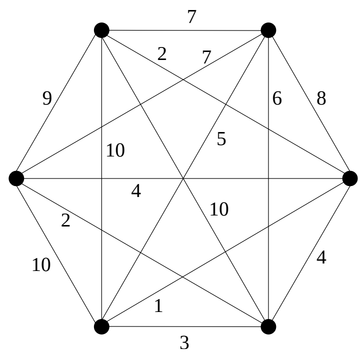


F_5

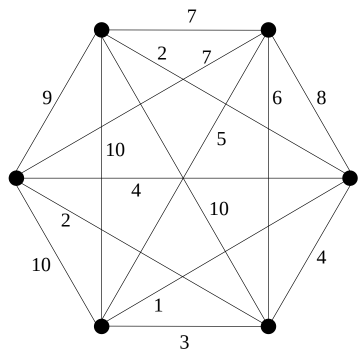
26. Trouver dans le graphe suivant les chemins de longueur minimale de u à tous les autres sommets.



27. Choisir un sommet u et trouver dans le graphe suivant les chemins de longueur minimale de u à tous les autres sommets. Répéter pour un autre sommet v et comparer le résultat.



28. Trouver un arbre couvrant optimal dans le graphe suivant (c.à.d. un arbre couvrant avec somme minimale de poids). Qu'est-ce que change si on minimise le *produit* des poids au lieu de la somme ?



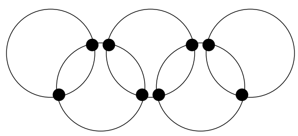
29. L'algorithme de Kruskal est une variation d'algorithme de Jarník-Prim où on choisit à chaque étape l'arête minimale, qui est connectée aux arêtes dejà trouvées et ne forme pas une cycle avec elles.

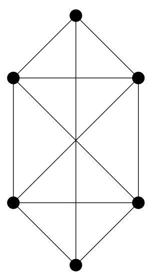
Montrer que l'algorithme de Kruskal donne toujours un arbre couvrant optimal.

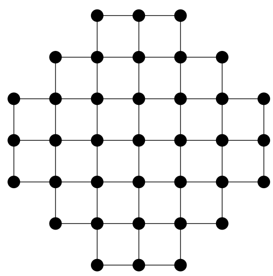
30. Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe d'exercice **28**.

31. Montrer que : Un graphe contient une chaîne qui utilise chaque arête exactement une fois, ssi le graphe et connexe et contient au plus deux sommets de degré impair.

32. Trouver un cycle Eulerien ou une chaîne Eulerienne dans les graphes suivants ou montrer qu'ils n'existent pas.







33. Lesquels de graphes suivants admettent un cycle Eulerien ou une chaîne Eulerienne ?

(a) K_n

(b) $K_{m,n}$.

(c) Les solides de Platon vus comme graphes des sommets.

(d) Le cube de dimension n.

34. Un graphe orienté est *faiblement connexe*, si le graphe non-orienté correspondant est connexe.
Un graphe orienté est *fortement connexe*, si, pour chaque $x, y \in V$, il existe une chaîne orientée de x à y.
Le *degré entrant* $d_{in}(x)$ est le nombre d'arêtes qui terminent à x et le *degré sortant* $d_{out}(x)$ est le nombre d'arêtes qui sortent de x.
Soit G un graphe orienté tel que $d_{in}(x) = d_{out}(x)$ pour tout $x \in V$.
Montrer que G est faiblement connexe si et seulement si G est fortement connexe.

35. Soit G un graphe orienté faiblement connexe tel que $d_{in}(x) = d_{out}(x)$ pour tout $x \in V$.
Montrer que G admet un cycle eulerien orienté (c.à.d. une chaîne orientée qui passe exactement une fois par chaque arête).

36. Trouver une suite cyclique de sept 0 et sept 1 telle qu'on trouve tous les blocs de longueur 4 sauf 0000 et 1111 parmi les blocs de quatre chiffres consecutifs.
(Exemple : La suite cyclique 101 contient 10,01 et 11 comme blocs de deux chiffres consecutifs.)

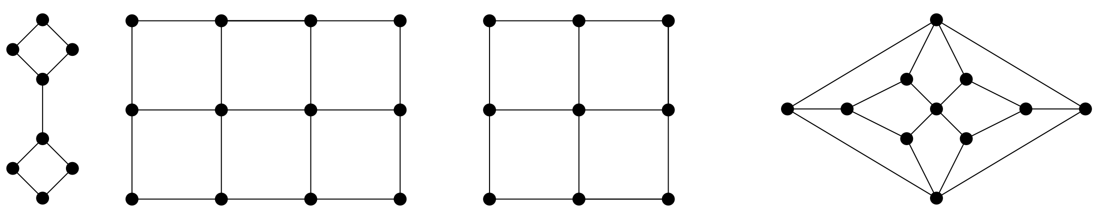
37. Soit A un alphabet de lettres $\{a, b, c\}$. Montrer qu'il existe une suite cyclique qui contient chaque lettre 27 fois et qui contient tous les mots de 4 lettres comme blocs de lettres consecutifs.

38. Montrer que : Si on enlève un sommet arbitraire de graphe de Petersen on obtient un graphe avec un cycle hamiltonien.

39. Trouver des cycles de longueur maximale et minimale dans le graphe de Petersen et dans le graphe de dodécaèdre.

40. Lesquels de graphes d'exercice **33** admettent un cycle hamiltonien ?

41. Les graphes suivants, contiennent-ils un cycle hamiltonien ?



42. Soit G un graphe simple tel que $d(x) + d(y) \geq n$ pour tout x, y non-adjacent.

(a) Montrer que G est connexe.

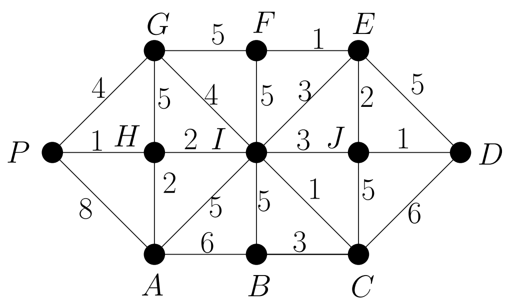
(b) Montrer que G contient un cycle hamiltonien.

43. Soit G un graphe biparti qui admet un cycle eulerien. Montrer que le nombre d'arêtes est pair.

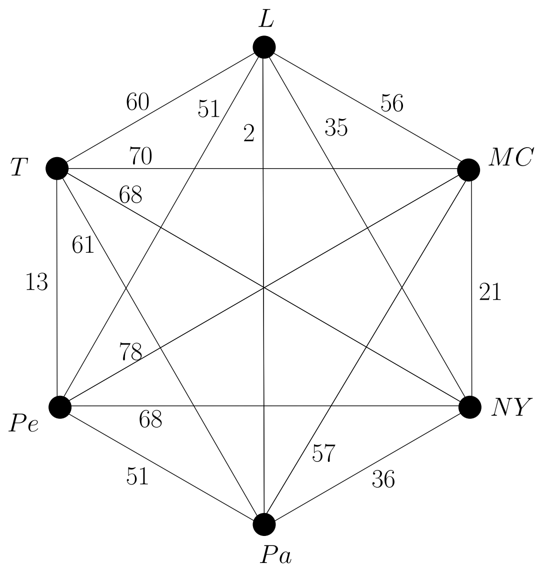
44. Soit G un graphe biparti avec bipartition $V = X \cup Y$ qui admet un cycle hamiltonien.
Montrer que $|X| = |Y|$.

45. On suppose que toutes les arêtes d'exercice **33** ont poids 1.
Trouver des routes optimales qui passent par toutes les arêtes.

46. Résoudre le problème de facteur chinois pour le graphe suivant :



47. Trouver une solution approximative du problème de voyageur de commerce pour le graphe suivant.
Utiliser l'algorithme de Prim-Jarník pour trouver une borne inférieure et comparer.



48. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres (non-vides) dont les sommets sont étiquetés avec $1, 2, \ldots, \nu(T)$.
Pour $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, soit $T_1 \circ T_2$ le nouveau arbre qu'on obtient si on identifie le sommet $\nu(T_1)$ dans T_1 avec le sommet 1 de T_2 et on remplace les étiquettes i de T_2 par $i + \nu(T_1) - 1$.
Montrer que $\mathcal{T}$ forme un monoïde avec l'opération $\circ$.
Montrer que $\circ$ n'est pas commutitatif et $\mathcal{T}$ ne forme pas un groupe avec $\circ$.

49. Soit A l'alphabet $\{a, b\}$.
Donner une liste $A^* = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ tel que M_{i+1} est un sous-monoïde (strict) de M_i.

50. Soit A_2 l'alphabet $\{a, b\}$ et A_3 l'alphabet $\{a, b, c\}$. On note P l'ensemble des mots sur A_2 formé par ε et les mots commençant par a et sans facteur bbb. Vérifier que P est un sous-monoïde de A_2^*.
Soit φ l'homomorphisme de A_3^* dans A_2^* défini par $\varphi(a) = abb$, $\varphi(b) = ab$, $\varphi(c) = a$. Montrer que c'est un isomorphisme de A_2^* sur P.
Remarque : Un isomorphisme de monoïdes est un homomorphisme bijectif dont l'inverse est un homomorphisme. Cependant tout homomorphisme de monoïdes qui est bijectif est un isomorphisme.

51. Soit A un alphabet contenant au moins les lettres a et b.
(a) Donner un homomorphisme μ de A^* dans $(A \cdot A)^*$.
(b) Donner un homomorphisme de A^* dans $(A \setminus \{b\})^*$.
(c) Y-a-t-il un isomorphisme de monoïdes entre $(A \setminus \{a\})^*$ et $(A \setminus \{b\})^*$?

52. Soit A l'alphabet $\{0, 1\}$. Lesquelles de fonctions suivantes entre A^* et A^* sont bien définies et homomorphismes de monoïdes ?
(a) La fonction qui remplace chaque bloc maximal de 1 consecutifs par 1.
(b) La fonction qui remplace chaque bloc 001 par 1.
(c) La fonction qui remplace chaque bloc 010 par 1.
(d) La fonction qui remplace chaque 0 par 1 et chaque 1 par 0.
(e) La fonction qui échange les deux prémières lettres.

53. Soit A l'alphabet $\{0, 1\}$ et L le langage $(A^* \cdot 1)$. Lesquelles de fonctions suivantes entre L et L sont bien définies et homomorphismes de monoïdes ?
(a) La fonction qui remplace chaque bloc maximal de 1 consecutifs par 1.
(b) La fonction qui remplace chaque bloc 001 par 1.
(c) La fonction qui remplace chaque bloc 010 par 1.

54. Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots qui commencent et terminent avec la même lettre.

55. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots dont la longueur est divisible par 3.

56. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots avec période 3 dont la longueur est divisible par 3.

57. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots contenants un nombre pair de a.

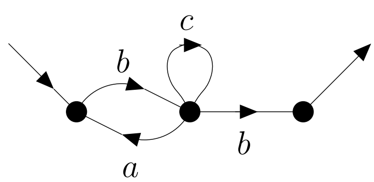
58. Soit $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle pour tous les mots qui contiennent exactement trois lettres a.

59. Soit $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle pour tous les mots qui contiennent au moins un a et au moins un b et dont la prémière occurrence de a est avant la prémière de b.

60. Soit $A = \{0, 1\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots qui correspondent aux représentations binaires des entiers divisibles par 3.

61. Donner une description en français des langanges donnés par les expressions rationnelles suivantes : AA, $(\varepsilon + A)(\varepsilon + A)$, $(AA)^*$, A^*aA^*, A^*abA^*, $A^*aA^*bA^*$, et $(ab)^*$.

62. Donner une expression rationnelle pour le langage defini par l'automate suivant :



63. Pour les exos **54–60** trouver un automate qui donne le même langage.