

## Devoir Maison Graphes, langages et automates

Theresia Eisenkölbl

À rendre le 31 mai 2010.

Chaque réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction est prise en compte.

1. Proposer un sujet pour l'examen final.

2. (arbres couvrants)

Soit  $K_{m,n}$  le graphe biparti complet.

- Trouver le nombre d'arbres couvrants de  $K_{2,2}$  et  $K_{2,3}$ .
- Trouver le nombre d'arbres couvrants de  $K_{2,n}$ .
- Trouver le nombre d'arbres couvrants de  $K_{m,n}$ .

3. (forêts couvrantes)

Une forêt est un graphe sans cycle qui n'est pas nécessairement connexe. Ses composantes connexes sont des arbres. Une forêt couvrante d'un graphe  $G$  est un sous-graphe de  $G$  qui est une forêt et utilise tous les sommets de  $G$ .

Soit  $\tilde{\tau}(G)$  le nombre de forêts couvrantes du graphe  $G$ .

- Soit  $G$  un graphe et  $e$  une arête de  $G$ . Montrer que  $\tilde{\tau}(G) = \tilde{\tau}(G \setminus e) + \tilde{\tau}(G/e)$ .
- Soit  $T$  un arbre à  $n$  sommets. Montrer que  $\tilde{\tau}(T) = 2^{n-1}$ .
- Soit  $C_n$  un cycle à  $n$  sommets. Trouver  $\tilde{\tau}(C_n)$ .
- Calculer le nombre des forêts couvrantes

$$\tilde{\tau}(\text{graphique})$$

4. (facteur chinois)

Soit  $G_n$  le graphe  $K_n$  où l'arête entre  $i$  et  $j$  a longueur  $|i - j|$ .

Résoudre le problème du facteur chinois pour  $n = 4, 5, 6$ .

5. (langages rationnels)

- Soit  $L$  le langage avec alphabet  $\{0, 1\}$  dont les mots sont les entiers en écriture binaire divisible par 5.  
Trouver un automate fini pour  $L$ .
- Soit  $k > 1$  un entier et soit  $L$  le langage avec alphabet  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  dont les mots sont les entiers en écriture décimale divisible par  $k$ .  
Montrer que  $L$  est un langage rationnel.