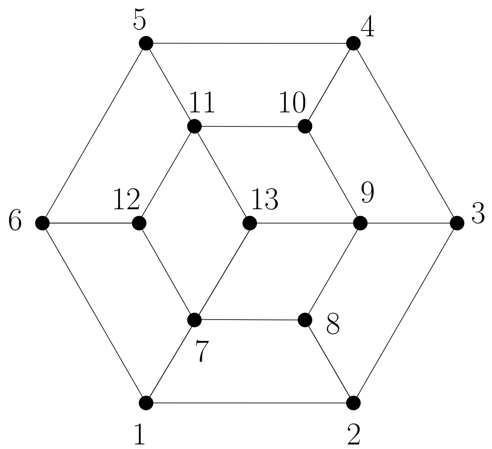
CC2 Graphes, Langages et Automates du 12 mai 2010 - 1h30 minutes

Theresia Eisenkölbl

Chaque réponse doit être justifiée

Question 1. Lesquels de graphes suivants contiennent un tour hamiltonien? Lesquels de graphes suivants contiennent un tour eulerien?

a. 

(1,5 pts)

Si on enlève les six sommets 2,4,6,7,9,11 ils restent sept composantes connexes. Donc, le graphe ne contient pas de tour hamiltonien.

Le sommet 1 a degré impair, le graphe ne contient pas de tour eulerien.

b. Le cube de dimension 3. **(1,5 pts)**

Un tour hamiltonien est donné par 000,001,011,010,110,111,101,100,000.

Tous les sommets ont degré impair, donc, il n'existe pas de tour eulerien.

c. Le cube de dimension 4. **(1,5 pts)**

Un tour hamiltonien est donné par 0000,0001,0011,0010,0110,0111,0101,0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001,1000,0000.

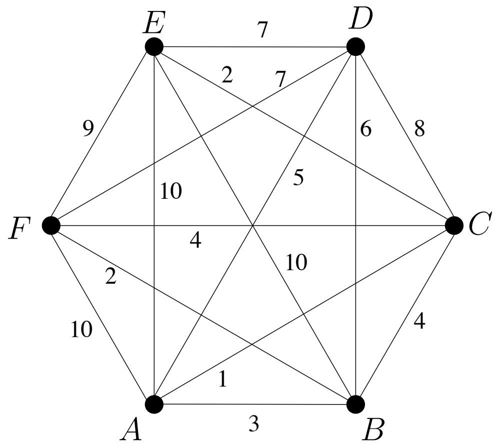
Le graphe est connexe et chaque sommet a degré 4 qui est pair, donc il contient un tour eulerien.

d. Un arbre à six sommets. **(1,5 pts)**

Par défintion, un arbre ne contient pas de cycle, donc il ne contient pas de tour hamiltonien.

Un arbre à six sommets contient au moins deux feuilles, qui sont des sommets de degré impair. Donc, ce graphe ne contient pas de tour eulerien.

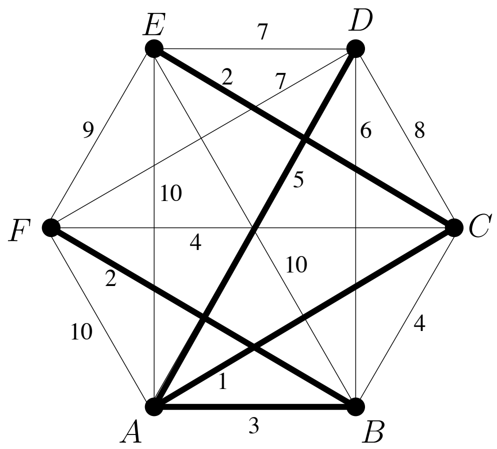
Question 2. Trouver un arbre couvrant de poids minimal de graphe suivant en utilisant l'algorithme de Prim-Jarník. **(5 pts)**



En commençant par le sommet A, on trouve le tableau suivant :

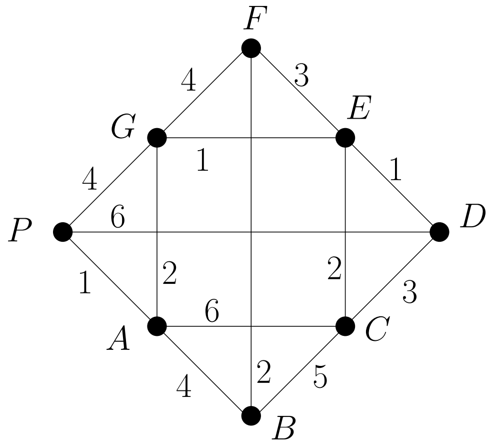
A	B	C	D	E	F
$\mathbf{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
$-$	$3, A$	$\mathbf{1}, \mathbf{A}$	$5, A$	$10, A$	$10, A$
$-$	$3, A$	$-$	$5, A$	$\mathbf{2}, \mathbf{C}$	$4, C$
$-$	$\mathbf{3}, \mathbf{A}$	$-$	$5, A$	$-$	$4, C$
$-$	$-$	$-$	$5, A$	$-$	$\mathbf{2}, \mathbf{B}$
$-$	$-$	$-$	$\mathbf{5}, \mathbf{A}$	$-$	$-$

On trouve donc l'arbre suivant de poids 13 :



Tournez la page s.v.p.

Question 3. Résoudre le problème de facteur chinois pour le graphe suivant :



(5 pts)

Voir l'exemple du cours après théoreme 3.3.2.

Question 4. **a. Soit G un graphe simple avec $\deg v \geq \frac{n}{2}$ pour tout $v \in V$. Soit $x_0 x_1 \dots x_{n-1}$ une chaîne qui passe exactement une fois par chaque sommet de G.**

Montrer que G contient un cycle hamiltonien. (3 pts)

Voir la partie 2 de la preuve du théoreme de Dirac 3.2.2.

b. Soit G un graphe connexe et e une arête de G.

Montrer que si $G \setminus e$ n'est pas connexe, G contient un sommet de degré impair. **(3 pts)**

Par l'absurde, supposer que tous les sommets de G ont degré pair. Comme G est connexe, il contient un tour eulerien. Si on enlève une arête du tour eulerien, le graphe reste toujours connexe. En particulier, $G \setminus e$ est connexe. Contradiction.