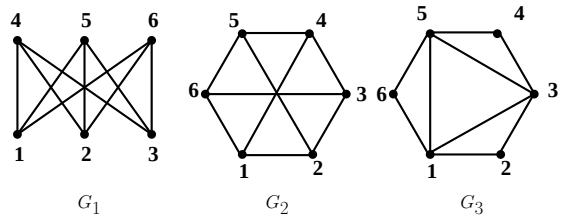
Université Claude Bernard Lyon 1
L2 - Graphes, Automates, Langages

CC1 du 31 mars 2010 - 1h30 minutes
Corrigé
Theresia Eisenkölbl

Question 1. Graphes /Propriétés de base



a. Lesquels des graphes G_1, G_2, G_3 sont isomorphes? Justifier. (2 pts)

Les graphes G_1 et G_2 sont isomorphes. Il suffit de donner la bijection entre leurs sommets parce qu'ils sont des graphes simples.
Par exemple : $(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6)) = (1, 3, 5, 2, 4, 6)$

Ces deux graphes ne sont pas isomorphes à G_3 parce que tous les sommets de G_1 et G_2 ont degré 3 et G_3 contient le sommet 1 qui a degré 4.

b. Donner la définition d'un graphe biparti. (1 pts)

Un graphe G est biparti si $\exists X, Y \in V(G)$ tels que $X \cup Y = V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$ et chaque arête a un sommet dans X et un sommet dans Y.

c. Lesquels des graphes G_1, G_2, G_3 sont bipartis? Justifier. (2 pts)

Le graphe G_1 est biparti avec $X = \{1, 2, 3\}$ et $Y = \{4, 5, 6\}$ (en fait, il s'agit de $K_{3,3}$).

Le graphe G_2 est biparti parce qu'il est isomorphe au G_1.

Le graphe G_3 n'est pas biparti parce qu'il contient le cycle de longueur impair 1231.

Question 2. Arbres / Propriétés de base

a. Donner la définition d'un arbre. (1 pts)

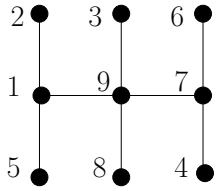
Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

b. En n'utilisant que la définition montrer qu'un arbre avec au moins deux sommets a au moins deux feuilles. (2 pts)

Théorème 2.1.1 du cours.

Question 3. Arbres couvrants/ Formule de Cayley

a. Trouver l'arbre qui correspond au code de Prüfer $(1, 9, 7, 1, 9, 7, 9)$**. (2 pts)**



b. Donner un exemple pour un code de Prüfer d'un arbre avec 3 sommets de degré 3 et 5 feuilles. (2 pts)

Un sommet de degré d apparaît exactement $d-1$ fois dans le code de Prüfer (TD exo 22).

Donc, $(1, 1, 2, 2, 3, 3)$ est un exemple.

Question 4. Arbres couvrants / Recurrence

a. Donner la formule de recurrence pour $\tau(G)$ (sans justification). (2 pts)

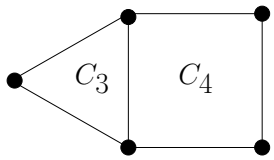
Théorème 2.2.2 du cours.

b. Déterminer $\tau(C_n)$ où C_n est le cycle de longueur n. Justifier. (2 pts)

Exemple du cours après Théorème 2.2.3.

c. Soit $C_{n,m}$ le graphe qui consiste d'un cycle de longueur n et un cycle de longueur m qui partagent exactement une arête (voir le dessin pour l'exemple $n = 3, m = 4$).

Déterminer $\tau(C_{n,m})$. Justifier. (2 pts)



$C_{3,4}$

On applique la formule à l'arête commune.

Le graphe $G \setminus e$ est un cycle de longueur $(n-1)+(m-1)$.

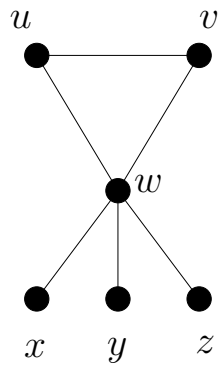
Le graphe G/e consiste d'un cycle de longueur $n-1$ et un cycle de longueur $m-1$ qui partagent exactement un sommet qui est un sommet séparateur du graphe. Par théorème 2.2.4 du cours, $\tau(G/e) = \tau(C_{n-1}) \cdot \tau(C_{m-1})$.

En utilisant le resultat pour $\tau(C_n)$, on trouve donc

$$\tau(C_{n,m}) = n + m - 2 + (n-1)(m-1) = mn - 1.$$

Question 5. Automorphismes de graphes

a. Montrer que dans le graphe suivant chaque automorphisme $(\phi, \bar{\phi})$ a un sommet fixe $\phi(s) = s$. (2 pts)



Le sommet w est le seul sommet du degré 5. L'image d'un sommet par φ est toujours un sommet du même degré. On a donc toujours $\varphi(w) = w$.

b. Est-ce que chaque automorphisme de ce graphe a aussi une arête fixe? ($\bar{\phi}(e) = e$) Justifier. (1.5 pts)

Oui. Les sommets u et v sont les seuls sommets du degré 2. On a donc deux possibilités pour leurs images par la bijection φ.

Si $\varphi(u) = u$ et $\varphi(v) = v$, l'arête uv est une arête fixe.

Si $\varphi(u) = v$ et $\varphi(v) = u$, l'arête uv est aussi une arête fixe.

c. Trouver un graphe qui a un automorphisme sans sommet et arête fixe. Justifier. (1.5 pts)

Un exemple est le triangle K_3 avec la rotation $(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3)) = (2, 3, 1)$.