Université Claude Bernard Lyon 1

Math II - Algèbre

Feuille 1 : Polynômes

Divisibilité

Exercice 1. * Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :

1) $X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$	2) X^2-1 dans $\mathbb{R}[X]$	3) X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$
4) X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$	5) $2X+4$ dans $\mathbb{Q}[X]$	6) $2X+4$ dans $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 2. * Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X-7$. Montrer que $R = P(7)$.

Exercice 3. Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X-a$ et par $X-b$.
Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?
Pourquoi l'hypothèse $a \neq b$ est-elle importante ?

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degré inférieure ou égal a 3, qui sont divisibles par $X-1$ et qui sont tels que les trois restes de leurs divisions euclidiennes repectives par $X-2$, par $X-3$ et par $X-4$ sont égaux.

Exercice 5. * Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par X^5-1.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99}+2X^{42}-3X^{35}-2X^{27}+3$ par X^5-1.

Exercice 6. Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X \sin a + \cos a)^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par X^2+1.

Définition des polynômes

Exercice 7. * Quels sont les polynômes de degré au plus un sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Et sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$? Combien y-a-t-il de polynômes de degré au plus 5 sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Généraliser.

PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide

Exercice 8. * A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

$$A = X^4+2X^3-X-2 \quad \text{et} \quad B = X^5-5X^3-9X^2-8X-3$$

et en déduire des polynômes U et V tels que

$$AU + BV = \text{PGCD}(A, B).$$

Exercice 9. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soient A, B et C trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si $A \mid C$, $B \mid C$ et $\mathrm{PGCD(A,B)} = 1$, alors $AB \mid C$.

Exercice 10. Calculer le PGCD de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ pour :

1) $A = 2X^4 - 11X^3 + 13X^2 + 24X - 14$ et $B = X^2 - X - 1$

2) $A = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $B = X^3 + 3X^2 - X - 3$.

Racines

Exercice 11. * Quelles sont les racines de $X^5 - X$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$? de X^2 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? de $X^2 - X$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 12. Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$. A-t-il des racines dans $\mathbb{Q}$? Même exercice avec le polynôme $X^7 + 3X^2 + 2$.

Exercice 13.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $deg(P) = deg(Q) = n$.
   On suppose qu'il existe k valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec $k > n$ tel que $P(x_i) = Q(x_i)$. Montrer que $P = Q$.

2. Soient (a_0, b_0), (a_1, b_1),..., (a_n, b_n), $n + 1$ points du plan $\mathbb{R}^2$ tels que les a_i sont distincts deux àdeux. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$. (On appelle P polynôme d'interpolation de Lagrange).

Facteurs irréductibles et leurs usages

Exercice 14. * Factoriser en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants

1. $X^4 - 16$ dans $\mathbb{C}[X]$

2. $X^4 - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$

3. $X^{11} + 2^{11}$, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$

4. $X^4 + j$ dans $\mathbb{C}[X]$ où $j := e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

5. $P = X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X + 31$, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$. Pour cette dernière question, on commencera par déterminer des nombres réels a et b tels que $P = X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X + 31 = (X + a)^5 + b$

Exercice 15. *

1. Est-ce que 1 est racine du polynôme réel $P = X^3 + X^2 + X + 1$? Qu'en est-il de -1? Trouver toutes les racines de P sur le corps $\mathbb{C}$.

2. Soit n un entier non nul. Quelles sont les racines du polynôme $1 + X + \cdots + X^n$ sur $\mathbb{C}$?

3. Décomposer $X^6 + 1$ en un produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}[X]$. Que peut-on faire dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 16. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 17. * Calculer le PGCD de $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X^4 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 18. * Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ $P = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Racines multiples

Exercice 19. * Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20. Déterminer une valeur du complexe λ pour laquelle le polynôme $P_\lambda = (X + 1)^5 - X^5 - \lambda$ admette au moins une racine multiple. Pour cette valeur de λ, décomposer alors P_λ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ ou sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21. Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer un PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 22. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré $n \geq 1$. On note x_i les racines de P, où $1 \leq i \leq p$ (p désignant le nombre de racines distinctes). On note enfin α_i la multiplicité de x_i comme racine de P.

1. Que vaut la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p$?
2. Montrer que si $P' \mid P$, alors $p = 1$. En déduire l'ensemble des polynômes à coefficients complexes divisibles par leur dérivé.

Relations entre racines et coefficients

Exercice 23. * Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 24. Soient α, β et γ les racines complexes du polynôme $P = X^3+3X^2+X+1$.

1. Écrire les relations reliant les racines et les coefficients de P.
2. Quelle est la valeur de $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 3\alpha\beta$?

Exercice 25.

1. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les cinq racines (complexes) du polynôme
$$P = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1.$$
Justifier que tous les nombres α_i sont non nuls puis écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \alpha_4^{-1}$ et α_5^{-1} sont les racines.
2. Soient p, q, r trois nombres complexes, r étant non nul. Soit $P = X^4+pX^2+qX+r$ et soient a, b, c, d les racines de P.
   Justifier que les racines de P sont toutes non nulles puis calculer $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}$ et $a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} + d^{-2}$.

Trucs en vrac

Exercice 26. Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:
$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n,\ m,\ p \in \mathbb{N} - \{0\}$.
4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

Exercice 27. Étant donné un entier naturel $n \geq 1$, on note P_n le polynôme (à coefficients rationnels)
$$1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)}{n!}.$$

1. Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, vérifier l'identité $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0$.
2. Déterminer les racines des polynôme P_n. (*Indication* : pour se faire une idée, on pourra commencer par calculer $P_n(1)$ et $P_n(2)$ en supposant $n \geq 2$.)
3. Factoriser P_n dans $\mathbb{Q}[X]$.

Université Claude Bernard Lyon 1

Math II - Algèbre

Feuille 2 : Fractions Rationnelles

Exercice 28. *

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}, \frac{X^5-X^3+X+1}{(X+1)(X-2)}, \frac{2X}{X^2+X+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-X-X^2}.$$

   Les décomposer.

2. Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples complexes la fraction rationnelle

$$\frac{4+5X}{X^n-1}.$$

   Même question en remplaçant $4+5X$ par un polynôme P arbitraire.

3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles

$$\frac{X^{10}}{X^4-5X^2+4} \quad \text{et} \quad \frac{X^5-X^3+X+1}{X^3-X^2-2X+2}.$$

Exercice 29. * Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^2+1}{X(X^2-1)}, \quad \frac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}, \quad \frac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)} \quad \text{et} \quad \frac{X^6-X^2+1}{(X-1)^3}$$

Exercice 30. * Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{X^4}{X^4+X^3+X^2+X+1}.$$

Exercice 31. * Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ la fraction suivante

$$F = \frac{1}{(X^2+1)^2-X^2}.$$

Indication. Noter que F est paire, i.e., $F(X) = F(-X)$.

Exercice 32. * On rappelle que si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et si $m \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ + X^{m+1}R; \quad \text{et} \quad \deg Q \leq m$$

Illustrer avec

a) $A = 1 - X$, $B = 1 + X^2$, $m = 4$;

b) $A = 1 + iX - X^2 + iX^3$, $B = 1 - iX$, $m = 3$.

Exercice 33. *

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction suivante

$$F = \frac{X^3 - 4X^2 + 1}{(X+2)^3(X+1)}.$$

Exercice 34. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction suivante

$$F = \frac{1}{X^2(X^2 - 2X + 2)^2}$$

Exercice 35. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction suivante

$$F = \frac{2X^6 + 3X^5 - 3X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 18X - 5}{X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - X + 2}.$$

Feuille 3 : Espaces vectoriels

Exercice 36. * On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et de la loi externe :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda x_1, 0) \,. \end{array}$$

A-t-on muni ainsi $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 37. * Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$;

b) $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$.

c) $u = (m + 1, -1)$, $v = (-3, m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$

Exercice 38. * Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$.

b) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$.

c) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-1, 1, 1)$.

d) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 2)$, $w = (1, -2, -1)$.

e) $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque la réponse est négative, on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 39. * On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{array}{l} F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = z = 0\} \\ F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 0\} \\ F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = y\} \\ F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y\} \,. \end{array}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Déterminer $F_2 + F_3$.

c) Déterminer $F_2 \cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?

d) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

e) Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.

f) Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions d) et e) ?

g) Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.

Exercice 40. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z+t = 0\} \\ G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y = z+t\} \\ H &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a = b = c = d\} \,. \end{aligned}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F+G$?

c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 41. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (2,-3,1)$ et $u_2 = (2,-2,1)$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Démontrer que le vecteur $u = (0,1,0)$ est élément de F, mais que $v = (0,0,1)$ ne l'est pas.

c) Calculer les composantes du vecteur $w = (0,4,0) \in F$ dans la base (u_1, u_2).

d) Exprimer qu'un vecteur $v = (x,y,z)$ appartient F par une équation en x, y, z.

f) Indiquer la nature géométrique de F.

Exercice 42. Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y = 0 \text{ et } z = 2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 43. Soit $a \in \mathbb{R}$ et E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $(1,1,a)$, $(1,a,1)$ et $(a,1,1)$. Suivant la valeur de a, déterminer la dimension de E_a.

Exercice 44. * Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

1) Montrer que $(1, \sqrt{2})$ est une famille libre.

2) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre.

3) Calculer le rang de $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Exercice 45. On dit qu'un nombre réel est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$.

1) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont-ils algébriques ?

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour que x soit algébrique, il faut et il suffit que le sous-espace vectoriel V_x de $\mathbb{R}$, espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, engendré par la famille $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

3) Soient x, y deux nombres réels algébriques. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, engendré par la famille $(x^i y^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est de dimension finie. En déduire que $x+y$ et xy sont algébriques.

4) Montrer que l'inverse d'un nombre réel algébrique non nul est algébrique.

Exercice 46. On considère le corps fini $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

1) Montrer que $E = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2) Calculer la dimension de E et exhiber deux bases différentes.

3) Combien y a-t-il de droites vectorielles dans E ?

4) Soit F l'espace engendré par le vecteur $(1, 2)$. Trouver un espace supplémentaire de F.

Exercice 47. * Soit $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Rappeler les définitions de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

b) Dire lequel de ces sous-ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$:

- $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) = \{$fonctions continues $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$;
- ensemble des applications surjectives (resp. injectives) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$;
- ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$;
- ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = f(b) + 1$.

Exercice 48. * Pourquoi les polynômes $1,\ X,\ X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3 ? Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 49. Soit $E := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Exercice 50. * Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres :

a) $\{x,\ e^x\}$; b) $\{e^x,\ e^{2x}\}$

c) $\{x,\ \sin x\}$; d) $\{\cos x,\ \sin x\}$

Exercice 51. * Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2\ u_n \quad (n \geq 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.

c) Tenant compte du fait qu'une suite (u_n) de $\mathcal{E}$ est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.

d) Déterminer les suites (u_n) de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 52. * Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en utilisant la méthode du pivot :

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0\,. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1\,. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ x + \lambda y + z = 1\,. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13\,. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ x - y + z - t = 0\,. \end{cases}$

Exercice 53. Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système :

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ 2y + (2 - \lambda)z = 0\,. \end{cases}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

Math II - Algèbre

Feuille 4 : Applications linéaires

Exercice 54. * Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$) :

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,a) \end{array}$ c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax,ay) \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+a,y+a) \end{array}$ e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y+z) \end{array}$

f) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x,0,x-y) \end{array}$ g) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 55. * Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{K}^2$ dans lui-même définies par

$$f(x,y) := (x,0) \quad \text{et} \quad g(x,y) := (0,y).$$

Déterminer $f+g$, $f \circ g$, f^2 et g^2.

Exercice 56. * On considère $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1\,, \quad f(e_2) = -e_1\,, \quad f(e_3) = e_3\,.$$

a) Déterminer l'image par f d'un élément $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de $\mathbb{K}^3$.

b) Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.

c) Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 57. * Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3\,, \quad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3\,, \quad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3\,,$$

où $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Démontrer que $F_1 := \{u \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(u) = u\}$ et $F_2 := \{u \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.

b) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercice 58. * Soit $a \in \mathbb{C}$, on définit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $z \mapsto z + a\bar{z}$.
Suivant les valeurs de a, dire si f est $\mathbb{C}$-linéaire ou $\mathbb{R}$-linéaire.

Exercice 59. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2\,, \quad f(e_2) = e_3\,, \quad f(e_3) = e_1\,,$$

où $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

a) Montrer que f est bijective.

b) Montrer que $f^3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}$.

c) Démontrer que $F := \{u \in \mathbb{K}^3 \ :\ f(u) = u\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ et déterminer sa dimension.

Exercice 60. * Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $f^2 = f$ (on dit que f est un projecteur).

a) Démontrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} - f$ est aussi un projecteur.

b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} - f) = \mathrm{Im} f$.

c) Démontrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

d) Donner un exemple de projecteur p dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 61. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

a) Montrer que si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$ alors $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ engendrent $\mathrm{Im} f$.

b) Montrer que si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ forment un système libre alors $v_1, v_2, \ldots, v_p$ aussi.

c) Montrer que si f est injective et si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est un système libre alors $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ est aussi libre.

Exercice 62. * Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que $u \circ v = 0$. Montrer que :

$$\mathrm{Im} v \subseteq \mathrm{Ker} u.$$

En déduire que

$$\mathrm{rang}(u) + \mathrm{rang}(v) \leqslant n\,.$$

Exercice 63. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)\,.$$

a) Montrer que u est linéaire.

b) Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?

c) En déduire que u est surjective.

Exercice 64. * Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note φ et ψ les deux applications de E vers E définies respectivement (pour toute f de E) par :

$$\varphi(f) = f' \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

a) Vérifier que φ et ψ sont linéaires.

b) Exprimer $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$.

c) Discuter la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité respectives de φ et ψ.

Exercice 65. * Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ engendré par les deux fonctions sin et cos.

a) Déterminer une base de H et préciser sa dimension.

b) Soit $F = \{f \in H \mid f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de F.

c) Soit φ l'application de H vers $\mathbb{R}^2$ définie pour toute $f \in H$ par

$$\varphi(f) = \left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Montrer que φ est une bijection linéaire.

d) Soit ψ l'application de H vers H définie pour toute $f \in H$ par $\psi(f) = f'$. Montrer que ψ est un automorphisme de H.

Feuille 5 : Matrices

Matrices et applications linéaires

Exercice 66. * Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$A \mapsto A +^t A.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 67. Pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit la trace de A par :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

a) Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, et que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si A et B sont deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$

c) Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X + \operatorname{tr}(X)A = B$.

d) Montrer qu'on ne peut pas trouver $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 68. Soient

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3 \mid a = 1 \right\}$$

$$\mathcal{B} := \left\{ A \in \mathcal{M}_2 \mid XA = AX,\ X := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, trouver une base et la dimension.

Exercice 69. * Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, soit (e_1, e_2, e_3) une base de E et soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) &= 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) &= 6e_1 + 6e_2 - e_3. \end{aligned}$$

a) Décrire l'application linéaire $f \circ f$.

b) Montrer que f est bijective et décrire l'application linéaire f^{-1}.

Exercice 70. Soit $n \geq 1$ un entier et $\mathbb{K}$ un corps commutatif ; on suppose en outre que dans $\mathbb{K}$, $1 + 1 \neq 0$. On considère les sous-espaces S_n et A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ composés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques.

a) Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer leurs dimensions respectives.

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est somme directe de S_n et A_n.

c) Que se passe-t-il si on essaie de faire le même exercice avec $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $n = 2$?

Exercice 71. Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, stable pour la multiplication des matrices. Quelle est sa dimension ?

b) Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ vers E définie pour tout z complexe par $\varphi(z) = M_{\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)}$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et qu'en outre pour tous z, z' complexes, $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$. En déduire que E est un corps commutatif.

Produits matriciels

Exercice 72. * Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $AB = BA$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 73. * Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Écrire $A = B + I_3$, calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n. Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 74. * On dit qu'une matrice carrée M est nilpotente lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ et qu'elle est unipotente lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = I$. Soit $n \geq 1$ un entier et A et B deux matrices carrées (n, n).

a) Montrer que si AB est nilpotente, BA l'est aussi.

b) Montrer que si AB est unipotente, BA l'est aussi.

Exercice 75. Soit A la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $B = A - I$.

a) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 0$.

b) En déduire A^n pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 76. * Soit $n \geq 1$ et soit A et B deux matrices carrées (n, n). On suppose que la somme de chaque ligne de A et la somme de chaque ligne de B vaut 1. Montrer qu'il en est de même pour le produit AB.

Exercice 77. Soit m un réel non nul ; on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $(A + I)(A - 2I)$.

b) Soit $B = \dfrac{1}{3}(A + I)$ et $C = \dfrac{1}{3}(A - 2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n (où $n \geq 1$ est un entier quelconque).

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C.$$

Exercice 78. Soit A la matrice carrée $(2, 2)$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $A^2 = 2A + 15I$.

b) Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

c) Donner une expression simple de a_n et de b_n, valable pour tout $n \geq 1$.

Exercice 79. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{250}.

Inversion de matrices

Exercice 80. * Montrer que la matrice carrée A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible en calculant explicitement son inverse.

Exercice 81. Soit A la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 82. A tout nombre réel t on associe la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

a) Soit t_1 et t_2 deux réels. Calculer le produit matriciel $M(t_1)M(t_2)$.

b) Soit t un réel. Montrer que $M(t)$ est inversible et fournir une expression très simple de $[M(t)]^{-1}$.

Exercice 83. Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible en calculant son inverse A^{-1}.

b) En déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 84. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis A^3, puis A^n pour tout entier $n \geq 1$. Calculer l'inverse B de A, puis toutes les puissances B^n pour $n \geq 1$.

Exercice 85. * Soit A une matrice carrée. On suppose que A vérifie l'identité : $A^3 - 2^A - I = 0$. Montrer que A est inversible et donner une formule simple pour A^{-1}.

Autour des changements de bases

Exercice 86. * Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrices à coefficients réels.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) deux bases de E ; soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1 et f_1 un vecteur non nul de F.

On suppose que la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est la matrice P.

a) Calculer la matrice P^{-1}.

b) Soit u l'application linéaire de E vers F dont la matrice est A dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1). Déterminer la matrice de u dans les bases (e_1', e_2', e_3') et $(5f_1)$.

Exercice 87. Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3$, $f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3$.

a) Vérifier que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de la base $\underline{e}$ la base $\underline{f}$.

b) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?

c) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

d) Pour v vecteur de E, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{f}$. Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.

Exercice 88. Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose $f_1 = e_1 - e_3$ et $f_2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$. Pour v vecteur de E, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$.

a) Est-il possible de trouver un f_3 tel que si $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\underline{f}$ est une base de E dans laquelle, pour tout vecteur v de E, la troisième coordonnée de v soit $z' = z$?

b) Mme question avec $z' = x - y + z$.

c) Quand la réponse est "oui", déterminer tous les f_3 qui conviennent.

Exercice 89. Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

a) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.

b) Calculer la matrice de u dans $\underline{f}$.

c) Calculer A^{100}.

Exercice 90. * Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver un vecteur f_1 non nul tel que $u(f_1) = -2f_1$. puis un vecteur f_2 non nul tel que $u(f_2) = 4f_2$.

b) Trouver une base f_3 de $\mathrm{Ker}u$.

c) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{f}$.

d) Calculer A^{100}.

Complément : Matrice et carré parfait

Exercice 91. On notera E l'ensemble des matrices réelles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ qui ont la propriété suivante : les trois sommes de ses trois lignes de M, les trois sommes des trois colonnes de M et les deux sommes des deux diagonales de M sont toutes les huit égales.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

b) Constater que si $M \in E$, ${}^tM \in E$.

c) Déterminer les matrices symétriques qui sont aussi dans E.

d) Déterminer les matrices antisymétriques qui sont aussi dans E.

e) En utlisant les questions précédentes et la formule $M = \frac{1}{2}(M +{}^t M) + \frac{1}{2}(M -{}^t M)$, déterminer la dimension de E.

Université Claude Bernard Lyon 1

Math II - Algèbre

Feuille 6 : Polynômes et Espaces Vectoriels

Exercice 92. Pour chacune des applications qui suit, dites (et justifiez !) si elle est ou non linéaire :

1) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = 2PP'$ (pour $P \in \mathbb{R}[X]$, P' est le polynôme dérivé).

2) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par : "$f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $X^4 - 5X + 2$ (pour $P \in \mathbb{R}[X]$) ; (selon l'usage la notation $\mathbb{R}_3[X]$ désigne lespace vectoriel des polynomes réels de degré inférieur ou égal à 3).

Exercice 93. Pour $n \geq 1$ entier, on note $R_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour $n \geq 1$ donné, on considère deux polynômes A et B de $R[X]$, où on suppose que A est de degré $n+1$. On définit une application u de $R_n[X]$ vers $R_n[X]$ en associant à tout polynôme P de $R_n[X]$ le reste de la division euclidienne de PB par A, que l'on note $u(P)$. On admettra sans chercher à le demontrer que u est une application linéaire.

I - Dans cette partie, on suppose que $n = 2$; on considère quatre réels a, b, c et λ, on pose $A = X^3 + aX^2 + bX + c$ et $B = -X + \lambda$.

1) Vérifier que la matrice de u dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $R_2[X]$ est la matrice :
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & c \\ -1 & \lambda & b \\ 0 & -1 & a+\lambda \end{pmatrix}.$$

2) On suppose dans cette question que $A = X^3 - X^2 - 3X + 2$ et que $B = -X + 2$. Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de u.

3) On suppose dans cette question que $A = X^3 - X + 1$ et que $B = -X + 1$. Montrer que l'application u est bijective, et écrire la matrice de $u1$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

II - Dans cette partie, n est un entier quelconque ($n \geq 1$).

4) On suppose dans cette question que les polynômes A et B sont premiers entre eux. Soit $P \in Keru$. Montrer que A divise P. En déduire que u est injective.

5) Soit $D \in \mathbb{R}[X]$ un diviseur commun à A et B. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, D divise $u(P)$.

6) Montrer que u est bijective si et seulement si A et B sont deux polynômes premiers entre eux.

Exercice 94. On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme u de $R_3[X]$ défini par :

$$u(P) = (1 - X^2)P'' - XP,$$

pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$.

1) Écrire la matrice de u dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de u.